Eszter Megyeri

Ökonomische Interpretation(en) der verallgemeinerten Lotka-Volterra-Modelle

Dissertation

2020

Andrássy Gyula Deutschsprachige Universität Budapest
Interdisziplinäre Doktorschule
Leiterin der Doktorschule: Prof. Dr. Ellen Bos

Eszter Megyeri

Ökonomische Interpretation(en) der verallgemeinerten Lotka-Volterra-Modelle

Betreuer:

Prof. Dr. Dietmar Meyer

Promotionsausschuss

Vorsitzende:

Prof. Dr. Martina Eckardt

Gutachter:

Dr. Sándor Kovács

Prof. Dr. Heinz-Dieter Wenzel

Mitglieder:

Univ.-Prof. Dr. habil. Siegfried F. Franke

Dr. Jörg Lackenbauer

30.10.2020

In Erinnerung an meinen Vater

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei jenen Personen bedanken, die es ermöglichten, diese Arbeit zu realisieren: Mein besonderer Dank gilt dem wissenschaftlichen Betreuer meiner Dissertation, Prof. Dr. Dietmar Meyer, der stets in das Gelingen dieser Arbeit vertraut hat und immer beratend und hilfreich zur Seite gestanden ist.

Mein Dank gilt weiters den Kollegen und Freunden von der Andrássy Universität Budapest für ihre informelle Kooperation und Unterstützung.

Ich danke ganz besonders meiner Familie, die immer an meiner Seite war.

Einleitung

Nahezu alle menschlichen Aktivitäten zeigen ein Auf und Ab, ein Hin und Her – ein ständig mehr oder weniger rhythmisches Pulsieren. Das fortgesetzte zyklische Auf und Ab, also eine in gewissem Maße getaktete Abfolge des Wachsens und Schrumpfens kann ferner auch im Tierreich und auch in der Wirtschaft beobachtet werden.

Das Lotka-Volterra-Modell, das im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht, ist ein ursprünglich in der theoretischen Ökologie angewendeter Ansatz. Demnach verhalten sich die Variablen des Modells wie in wechselseitiger Abhängigkeit stehende Arten, wie Räuber und Beute im Tierreich: Demzufolge kann eine erste Variable (Räuber) ohne eine ausreichende Anzahl der zweiten Variablen (Beute) nicht existieren. Nimmt der Bestand der ersten Variablen zu, so sinkt die Anzahl der zweiten Variablen und verringert somit die zukünftige Zahl der ersten.[1] Das Modell bildet permanente Schwankungen zweier Variablen im Zeitablauf mathematisch – mit Hilfe von Differenzialgleichungen – ab, die teils antagonistisch, teils komplementär sind.

Die Anfänge dieser Arbeit liegen relativ weit zurück, die ersten Beschäftigungen mit dem Thema, mit dem Lotka-Votlerra-Modell und vor allem seinen ökonomischen Interpretationen, erfolgten zuerst im Rahmen einer Seminararbeit, dann in der Magisterarbeit an der Andrássy Universität. Das Modell faszinierte mich wegen seiner Einfachheit und Eleganz sowie der Tatsache, dass es trotz Nichtlinearität relativ einfach handhabbar ist. Darüber hinaus beschreibt es regelmäßige Zyklen, verhält sich neutral stabil und lässt sich auf verschiedene Arten weiterentwickeln. Deswegen steht die genaue Einschätzung seines Potenzials, insbesondere weiterer möglicher Anwendungsfelder in der Ökonomie im Zentrum der vorliegenden Dissertation.

Die wichtigste Grundeigenschaft des Lotka-Volterra-Modells ist die Dynamik, und dass die Wechselwirkung der Variablen mit einem System von zwei Differenzialgleichungen beschrieben wird. Das Modell hat sich in der Praxis bewährt. Es ist in der Lage, die wesentlichen Charakteristika von zahlreichen unterschiedlichen Phänomenen –

[1] Vgl. Gabler (2000), S. 2579.

mindestens qualitativ – gut beschreiben zu können. Lotka-Volterra-Modelle werden in vielen wissenschaftlichen Disziplinen, wie z. B. in der Physik (Flüssigkeitsmechanik), Chemie (Reaktionskinetik), Technik (Regelsysteme), Geographie, Demographie, darüber hinaus in der Biomedizin sowie in der Analyse epidemiologischer Prozesse und komplexer Netzwerke eingesetzt. Auch findet es im militärischen Bereich und in den Wirtschaftswissenschaften Anwendung.[2]

Das Modell lässt sich gewinnbringend auf unterschiedliche ökonomische Fragestellungen anwenden. Die bekanntesten dieser Anwendungen des Lotka-Volterra-Modells betreffen die Konjunkturtheorie, aber es sind zum Beispiel auch Anwendungen in der ökonomischen Theorie regenerativer natürlicher Ressourcen, in der Innovationsökonomik sowie in der Regionalökonomik zu finden. Darüber hinaus sind auch Einsatzmöglichkeiten in der Außenwirtschafts-, oder in der Verteilungstheorie vorstellbar. Des Weiteren könnten auch Modelle, die sich mit Kapitalmobilität oder der Mobilität des Faktors Arbeit beschäftigen, in Form von Räuber-Beute-Beziehungen entwickelt werden.[3]

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die differenzierte Darstellung der Einsatzfähigkeit des Lotka-Volterra-Ansatzes in der Ökonomie. Ausgehend vom Lotka-Volterra-Modell wird anhand von Analogien gezeigt, wie ein aus einer anderen Wissenschaft übernommener Ansatz in der Ökonomie eingesetzt wird, welche Erkenntnisse dabei über das dynamische Verhalten sowie über die Existenz und Stabilität des dynamischen Gleichgewichts einzelner Systeme gewonnen werden können. In einem weiteren Schritt lassen sich dann die Auswirkungen aufzeigen, die auftreten, wenn das Grundmodell modifiziert, bzw. erweitert wird.

Analogien aus der Biologie wirkten auf viele Ökonomen inspirierend. Marshall z. B. definierte die Wissenschaft der Biologie als das eigentliche Mekka der Ökonomen[4], und nach anderer wissenschaftlicher Auffassung ist die Gesellschaftswissenschaft im

[2] Vgl. Pommerening (1987), S. 2 und Gorman/Kulkarni/Schintler et al. (2004), S. 3.
[3] Vgl. Wacker (2000), S. 140.
[4] „The Mecca of the economist lies in economic biology rather than in economic dynamics." vgl. Marshall (2013), S. xxv.

Grunde genommen ein Teilgebiet der Biologie[5]. In diesem Zusammenhang ist sowohl die Entstehung des Ausgangsmodells aus der theoretischen Ökologie als auch der dogmenhistorische Hintergrund der ersten ökonomischen Anwendungen hochinteressant.

Dementsprechend stehen zwei Linien der Untersuchung im Zentrum der vorliegenden Arbeit. Zum einen soll die Übertragung des Lotka-Volterra-Modells auf die Ökonomie nachgezeichnet und deren weiteren Anwendungsmöglichkeiten abgeklärt werden. Dies soll anhand folgender konkreter Forschungsfragen erfolgen:

1. Was ist die Theoriegeschichte der Lotka-Volterra-(Palomba)-(Goodwin)-(Samuelson)-Modellfamilie?
2. Welche sind die möglichen Verallgemeinerungen des Modells, bei denen die Eigenschaften des Modells noch erhalten bleiben? Wie könnten / sollten diese Verallgemeinerungen inhaltlich interpretiert werden?

Die vorliegende Arbeit besteht aus acht Teilen, die Antworten auf diese Fragen suchen. *Im ersten Kapitel* werden die Bedeutung der Dynamik und die Entstehung der dynamischen Betrachtungsweise in der Ökonomik zusammenfassend dargestellt und diskutiert. Die ersten dynamischen Modelle werden dabei kurz beschrieben.

Im zweiten Kapitel wird das Lotka-Volterra-Modell zunächst vorgestellt, anschließend werden seine wichtigsten mathematischen Eigenschaften beschrieben und erläutert.

Das dritte Kapitel stellt wichtige ökonomische Anwendungen des Modells vor. Hier werden diejenigen Lotka-Volterra-Modelle der Volkswirtschaftslehre (das Goodwin-Modell, der Aufsatz von Samuelson und das Realkapital-Humankapital-Modell von Dietmar Meyer) erörtert, die im Folgenden als Grundlage für weitere Untersuchungen und für theoretische Erweiterungen dienen.

Das Modell von Palomba, das nach unserem heutigen Wissen als die erste ökonomische Anwendung bekannt ist, wird *im vierten,* im dogmenhistorischem *Kapitel* vorgestellt. In diesem Kapitel werden auch der geschichtliche Hintergrund und die Entstehung der

[5] „ … social science is ultimately a subfield of biology.” vgl. Epstein (1997), S. 17.

Modelle (des Lotka-Volterra-Modells, des Goodwin-Modells und von Samuelsons Aufsatz) dargestellt.

Das fünfte Kapitel gibt einen Literaturüberblick über (vorwiegend) andere Teilgebiete der Wirtschaftswissenschaften, wo das Lotka-Volterra-Modell auch erfolgreich eingesetzt wurde.

Das sechste Kapitel beinhaltet die Beschreibung und Erläuterung der eigenen Modellerweiterungen und / oder Simulationen (Berücksichtigung der Diffusion und Untersuchung von zwei gekoppelten Systemen, Einführung des staatlichen Sektors, Berücksichtigung von zeitlicher Verzögerung), wobei die Frage gestellt wird, ob regelmäßige Zyklen in den erweiterten Modellen erhalten bleiben.

Im siebten Kapitel folgt ein empirisches Assessment mit OECD-Daten, ob und inwieweit Zyklen vom Goodwin-Typ existieren.

Das achte Kapitel verfolgt die Herangehensweise der Spieltheorie. Das Lotka-Volterra-Modell wird aufgrund des Satzes von Hofbauer ins Modell der evolutorischen Spieltheorie transformiert und die Ergebnisse ökonomisch interpretiert. Dabei wird auf die Frage eingegangen, was die Äquivalenz inhaltlich bedeutet.

Die Arbeit schließt mit einer Schlussbetrachtung, in der die wichtigsten Schlussfolgerungen zusammengefasst werden.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung ..... **V**

Einleitung ..... **VII**

Abbildungsverzeichnis ..... **XIII**

Tabellenverzeichnis ..... **XIV**

Anhangverzeichnis ..... **XV**

1. Dynamik 1

1.1 Entstehung und Bedeutung der dynamischen Betrachtungsweise in der Ökonomik 1

1.2 Die ersten linearen und nichtlinearen dynamischen Modelle 4

1.3 Nichtlineare dynamische Modelle vom Räuber-Beute-Typ 9

2. Das Lotka-Volterra-Modell 13

2.1 Beschreibung des Modells 13

2.2 Mathematische Eigenschaften des Modells 14

3. Lotka-Volterra-Modelle in der Volkswirtschaftslehre 20

3.1 Das Goodwin-Modell 20

3.1.1 Darstellung des Modells 21

3.1.2 Die Räuber-Beute Analogie 24

3.2 Samuelsons Aufsatz 25

3.2.1 Darstellung des Modells 25

3.2.2 Analyse der Modelle im Aufsatz von Samuelson 28

3.2.3 Unterschiede zwischen Samuelsons und Goodwins Modell 33

3.2.4 Kann auch das Goodwin Modell „à la Samuelson“ erweitert werden? 35

3.2.4.1 Erste Modellerweiterung – sinkende bzw. steigende Skalenerträge .. 35

3.2.4.2 Zweite Modellerweiterung – Grenzzyklus 37

3.3 Das Realkapital-Humankapital-Modell 37

4. Geschichtlicher Hintergrund der dynamischen (oder Lotka-Volterra-) Modelle

Lotka und Volterra, sowie 40 Jahre später Goodwin und Samuelson – was war dazwischen? 41

4.1 Lotka, Volterra und die Lotka-Volterra-Gleichungen 41

4.2 Palombas Modell – Ist es nur vom dogmenhistorischen Gesichtspunkt aus wichtig? 50

4.2.1 Darstellung des Modells 51

4.2.2 Der Lotka-Volterra-Hintergrund 52
4.2.3 Palombas Beobachtungen und Schlussfolgerungen 52
4.3 Zur Entstehung des Goodwin-Modells 54
4.4 Das Goodwin-Modell und die Nachwelt 58
4.5 Zur Entstehung von Samuelsons Artikel 60
5. Weitere Anwendungsbereiche in der Ökonomie - Literaturübersicht 63
5.1 Andere ökonomische Anwendungen in der Konjunkturtheorie 63
5.2 Innovation 65
5.3 Ressourcenökonomik 67
5.4 Regionale und städtische Dynamik 73
6. Theoretische Modellerweiterungen 79
6.1 Berücksichtigung der Diffusion 79
6.1.1 Räuber-Beute-Interaktionen und Migration 79
6.1.2 Multiregionale Erweiterung des Goodwin-Modells 83
6.2 Einführung des staatlichen Sektors 84
6.2.1 Realkapital-Humankapital-Modell mit ausgeglichenem Staatshaushalt 84
6.2.2 Realkapital-Humankapital-Modell mit unausgeglichenem Staatshaushalt 88
6.3. Berücksichtigung der zeitlichen Verzögerung 92
6.3.1 Das Lotka-Volterra-Modell mit zeitlicher Verzögerung 92
6.3.2 Zeitliche Verzögerung im Goodwin-Modell 97
6.3.3 Weitere Erweiterungen 100
7. Empirisches Assessment eines erweiterten Goodwin-Modells 104
8. Evolutorische Spiele 110
8.1 Evolutorische Herangehensweise und die Darstellung der Auswirkungen von Mikrointeraktionen auf die Makrostruktur 110
8.2 Grundkonzepte der evolutorischen Spieltheorie 113
8.3 Replikator-Dynamik und die Lotka-Volterra-Gleichungen 120
8.4 Interpretation der Ergebnisse 122
8.5 Das Realkapital-Humankapital-Modell als evolutorisches Spiel 124
9. Schlussbetrachtung 127
Literaturverzeichnis **130**
Anhang **140**

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1: Höhenlinien des „Gebirges“ $F(x,y)$ 17
Abbildung 2.2: Schematisch dargestellte periodisch oszillierende Lösungen des Lotka-Volterra-Modells 18
Abbildung 3.1: Phasenporträts 27
Abbildung 3.2: Form der Funktion $R_i(X_i)$ im erweiterten Modell 31
Abbildung 3.3: Stabiler Grenzzyklus 33
Abbildung 6.1: Räuber-Beute-Interaktionen im Zwei-Regionen-Modell 82
Abbildung 6.2: Gewichtsfunktion 94
Abbildung 6.3: Räuber-Beute-Interaktion im Zeitverzögerungsmodell mit großem Anpassungsfaktor α 96
Abbildung 6.4: Räuber-Beute-Interaktion im Zeitverzögerungsmodell mit kleinem Anpassungsfaktor α 97
Abbildung 7.1: *uv*-Zyklen in Deutschland 105
Abbildung 7.2: *uv*-Zyklen im Vereinigten Königreich 105
Abbildung 7.3: Lohnquote (u) in Deutschland, in den Niederlanden und im Vereinigten Königreich 106
Abbildung 7.4: Beschäftigungsquote (v) in Deutschland, in den Niederlanden und im Vereinigten Königreich 106
Abbildung 7.5: *uv*-Zyklen in Tschechien 107
Abbildung 7.6: *uv*-Zyklen in Ungarn 107
Abbildung 7.7: Lohnquote (u) in Tschechien, Polen, Ungarn und in der Slowakei 108
Abbildung 7.8: Beschäftigungsquote (v) in Tschechien, Polen, Ungarn und in der Slowakei 108
Abbildung 7.9: Lohnquote (u) in Österreich und Ungarn 109
Abbildung 7.10: Beschäftigungsquote (v) in Österreich und Ungarn 109

Tabellenverzeichnis

Tabelle 8.1: Auszahlungsmatrix des Lotka-Volterra-Modells 123
Tabelle 8.2: Auszahlungsmatrix des Realkapital-Humankapital-Modells 125

Anhangverzeichnis

Anhang 1: Brief von Samuelson an Eszter Megyeri vom 17. August 2006 140

Anhang 2: Stabilitätsuntersuchung des vierdimensionalen Räuber-Beute-Modells.. 143

Anhang 3: Untersuchung des erweiterten Realkapital-Humankapital-Modells..... 148

Anhang 4: Untersuchung des Differenzialgleichungssystems der Replikatoren-gleichung 158

1. Dynamik

1.1 Entstehung und Bedeutung der dynamischen Betrachtungsweise in der Ökonomik

Lange Zeit konzentrierte die moderne Ökonomie (hierunter soll die sich um 1870 herausgebildete Volkswirtschaftslehre verstanden werden) ihre Aufmerksamkeit ausschließlich auf die Gleichgewichtsanalyse. Die Untersuchungen und die ersten formalisierten Modelle waren *statisch*, im Mittelpunkt der Modelle stand, die Existenz des Gleichgewichtes zu beweisen. Walras zum Beispiel, der häufig als Begründer der allgemeinen Gleichgewichtstheorie angesehen wird,[6] setzte sich in seinem mathematischen Modell mit der gleichzeitigen Existenz des Gleichgewichts auf interdependenten Märkten auseinander und untersuchte auch die Bedingungen für eine solche Situation. Er beschrieb eine stationäre Wirtschaft mit einem System von simultanen linearen Gleichungen.[7] In diesem Gleichungssystem war die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten, woraus Walras schloss, dass eine Lösung, also ein allgemeines Gleichgewicht existiert.[8]

In den statischen Modellen wurden die betrachteten Ereignisse in der Regel als Einzelerscheinungen beschrieben. Solche Fragen wie z. B. wie das Gleichgewicht zustande kommt, oder wann und entlang welchen Pfades aus einem Ungleichgewichtszustand das Gleichgewicht entsteht, wurden im Wesentlichen vernachlässigt. Und auch in diesem Zusammenhang muss, paradoxerweise, wieder Walras erwähnt werden, denn er war die große Ausnahme, zumindest zu damaliger Zeit. Er war der Erste, der sich die Frage stellte, wie dieser als existent angenommene Gleichgewichtszustand eigentlich erreicht würde. Dazu gab er eine verbale Erklärung mithilfe eines Auktionators, der Preise ausruft und sie dem Ungleichgewicht auf den einzelnen Märkten entsprechend solange ändert, bis sich alle Märkte im Gleichgewicht befinden.[9]

---

[6] Zalai (2011), S. 12.
[7] Zalai (2011), S. 12-20 und Mátyás (1993), S. 34-44.
[8] Dadurch ist natürlich noch nicht gesichert, dass eine Lösung – mit positiven Werten der Variablen – auch wirklich existiert.
[9] Mátyás (1993), S. 40-41.

Bei *quasi-dynamischer* (oder komparativ-statischer) Untersuchung wird der analysierte Prozess zu verschiedenen Zeitpunkten statisch betrachtet und dann werden diese Ergebnisse miteinander verglichen. Die Änderungsrate des Prozesses zwischen den einzelnen Zeitpunkten wird als konstant angesehen, die Zeit als exogener Parameter einbezogen. (Der Zinssatz beispielshalber bedeutet den Vergleich von Geldbeträgen zu verschiedenen Zeitpunkten und verändert sich zwischen den Zeitpunkten nicht). Der Vergleich erfolgt hauptsächlich verbal, bzw. anhand von Darstellungen durch statistische Tabellen oder Daten. Erst in den 60er, 70er Jahren wird mit der modellartigen, formalisierten Analyse unter Verwendung des totalen Differenzials begonnen.

Einer der großen Beiträge der ökonomischen Analyse im 20. Jahrhundert ist die Berücksichtigung der *Zeit*, genauer formuliert: des zeitlichen Ablaufs der Wirtschaftsprozesse. Mit der immer häufigeren Berücksichtigung der Zeit in den Modellen wurde auch das Begriffspaar *Statik* und *Dynamik* klar voneinander getrennt. Zwei Auffassungen – von Roy Harrod bzw. von Ragnar Frisch – bezüglich der Interpretation dieser Begriffe sind allgemeiner bekannt, sie werden hier kurz vorgestellt.

Nach der Auffassung von *Harrod* stellen Statik und Dynamik ein wesentliches Element, eine Eigenschaft des untersuchten Phänomens dar. In einer statischen Wirtschaft fehlen die Wachstumsfaktoren. Die Bevölkerungsgröße, der Kapitalstock, das Niveau technologischer Kenntnisse, der Geschmack der Verbraucher sind gegeben und ihre Reproduktion erfolgt stets auf demselben Niveau. In einer dynamischen Wirtschaft mit Wachstumsfaktoren ändert sich das Volumen der Reproduktion. Die dynamische Analyse konzentriert sich nach Ansicht von Harrod auf die Änderungs- oder Wachstumsraten.[10]

Nach der Auffassung von Ragnar *Frisch* bedeuten Statik und Dynamik Betrachtungsweisen, bzw. Analysemethoden.[11] Die statische Methode bedeutet *Zustandsanalyse*, die Wirtschaft wird im Gleichgewichtszustand untersucht, alle

[10] Vgl. Mátyás (1993), S. 206.
[11] Diese Interpretation von R. Frisch wird von einem großen Teil der Ökonomen anerkannt.

Variablen beziehen sich auf den gleichen Zeitpunkt[12] bzw. auf die gleiche Zeitperiode. Die statische Analyse im Sinne Frischs geht von einer unendlich großen Reaktionsgeschwindigkeit aus.[13]

Die dynamische Betrachtungsweise oder die dynamische Analyse ist dagegen *Prozessanalyse*, die die aufeinanderfolgenden Zustände kettenartig miteinander verbindet. Die dynamische Analyse berücksichtigt den Zeitfaktor, die Variablen beziehen sich auf unterschiedliche Zeitpunkte, und es wird der Zusammenhang[14] dieser Variablen untersucht. Die Analyse geht nicht – wie bei der statischen Betrachtungsweise im Sinne von Frisch – von einer unendlich großen Reaktionsgeschwindigkeit aus, sondern rechnet damit, dass die Variablen ihre Werte unterschiedlich schnell verändern.[15]

Seit Samuelson werden zwei Methoden der dynamischen Analyse unterschieden: die *Periodenanalyse* und die *Ratenanalyse*. Bei der Periodenanalyse wird die Zeit als diskontinuierlich angenommen, die Variablen ändern sich mit der Zeit nicht kontinuierlich, sondern sprunghaft am Ende einer Periode (diskretes Zeitkonzept). Die Variablen können also nach der Zeit nicht differenziert werden, die mathematische Beschreibung der ökonomischen Zusammenhänge erfolgt mithilfe von Differenzengleichungen. Bei der Ratenanalyse wird die Zeit dagegen als kontinuierlich angenommen (stetiges Zeitkonzept), die Zusammenhänge werden mit stetigen Funktionen der Zeit beschrieben und die mathematische Behandlung erfolgt mithilfe von Differenzialgleichungen.[16]

Bei der Entstehung und Entwicklung der dynamischen Analyse spielte auch die *Empirie* eine wichtige Rolle, nämlich als man begann, bewusst mit Zeitreihen zu arbeiten. Dabei wurden die ökonomischen Größen im Zeitablauf zuerst mit Diagrammen, danach auch mit Formeln (z. B. Inflation, Zinssätze, Produktionsergebnisse, usw.) beschrieben. Diese Methode war zumindest in der Anfangsphase eher von deskriptiver Natur, nach einem Ursache-Wirkungs-Zusammenhang im Hintergrund wurde noch nicht gesucht.

[12] Wie z. B. im Gleichungssystem von Walras, vgl. Frisch (1974), S. 104.
[13] Vgl. Ott (1963), S. 21.
[14] Dies meistens in Form von Differenzen- oder Differenzialgleichungen.
[15] Vgl. Mátyás (1993), S. 207-208 und Ott (1963), S. 21.
[16] Vgl. Ott (1963), S. 27-28 und Mátyás (1993), S. 210.

Überdies versuchte man, dynamische Beziehungen durch statistische Schätzmethoden zu quantifizieren. In der auf eine knapp 100-jährige Vergangenheit zurückblickenden *Ökonometrie* wurden separate ökonomische Zusammenhänge aus den empirischen Daten geschätzt, sowie Modelle zusammenhängender Systeme durch die Anwendung simultaner Schätzmethoden entwickelt und angewendet.[17]

Die eigentliche *Dynamik* beginnt jedenfalls dann, wenn diese Visionen und Tendenzen gemeinsam ermöglichen, die Veränderung oder Entwicklung eines Phänomens in der Zeit möglichst mit einem theoretischen Modell zu erklären.

Nach der auf R. Frisch und P. A. Samuelson zurückgehenden Definition wird ein System dynamisch genannt, „wenn sein Verhalten im Zeitverlauf durch Funktionalgleichungen beschrieben wird, in denen Variable, die zu verschiedenen Zeitpunkten gehören, auf eine wesentliche Art vorkommen.“ [18]

Dementsprechend ist die Bedeutung der dynamischen Theorie in erster Linie darin zu sehen, dass die dynamische Analyse ermöglicht, Prozesse im Zeitablauf zu erklären, vor allem, wie ein Zustand eines ökonomischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt aus einem zeitlich vorhergehenden Zustand folgt. Damit ist es mit der dynamischen Modellierung auch möglich, exogen hervorgerufene, oder aber auch endogene Schwankungen eines ökonomischen Systems zu behandeln.[19]

1.2 Die ersten linearen und nichtlinearen dynamischen Modelle

Aus dem bisher Gesagten folgt, dass die Dynamik erfasst werden kann, wenn die zeitliche Entwicklung eines Phänomens abstrakt beschrieben werden kann. Dazu ist neues methodisches Werkzeug nötig, das die Wertveränderung von Variablen sowie deren Wechselwirkung auch als Funktion der Zeit ausdrückt.

[17] Vgl. Stöppler (1980), S. 1.
[18] Zitiert nach Richter/Schlieper/Friedmann (1981), S. 38, Originalzitat vgl. Samuelson (1947), S. 314.
[19] Vgl. Ott (1963), S. 29.

Die ersten Modelle, mit denen versucht wurde, dynamische Wirtschaftsprozesse mittels einfacher formaler Zusammenhänge zu beschreiben sowie die qualitativen Eigenschaften und das Verhalten des Systems zu analysieren, entstanden in den frühen dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts vor allem auf dem Gebiet der Konjunkturtheorie.[20]

Bei den ersten Modellversuchen, Konjunkturschwankungen formal zu beschreiben, benutzte man – sicherlich der Einfachheit halber – *lineare* Gleichungen, somit können die darauf aufbauenden Modelle beschrieben werden. Bald zeigte sich aber, dass diese Modelle nur nichtzyklisches Verhalten reproduzieren konnten und daher nicht geeignet waren, die in der Realwirtschaft beobachteten Schwankungen darzustellen.

Ein Beispiel dafür ist das Wachstumsmodell von Harrod[21]:

$$Y_t = C_t + I_t \tag{1.1}$$

$$C_t = cY_t \tag{1.2}$$

$$I_t = k\,\Delta Y_t \tag{1.3}$$

wobei Y_t das Inlandsprodukt, C_t den Konsum, und I_t die Nettoinvestitionen zum Zeitpunkt t, sowie k den als konstant angenommenen Akzelerationskoeffizienten und c die marginale Konsumneigung bezeichnen.

Einfache Umformungen liefern die Gleichung (1.4),

$$\frac{\Delta Y_t}{Y_t} = \frac{1-c}{k} \tag{1.4}$$

die die Wachstumsrate des Inlandsproduktes beschreibt. Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung stellt eine Konstante dar, dementsprechend beschreibt das Modell ein exponentielles, aber kein zyklisches Wachstum.

[20] Vgl. Stöppler (1980), S. 1.
[21] Vgl. Mátyás (1993), S. 386.

Daraus entwickelte sich die Wachstumstheorie, deren bekanntestes Modell das Solow-Swan-Modell ist. In diesem Modell wird die zeitliche Veränderung des Einkommens mittels einer Differenzialgleichung erster Ordnung beschrieben, wobei versucht wird, die Frage zu beantworten, wie das langfristige Wachstum des Einkommens möglich ist.[22] Allerdings konzentriert sich die vorliegende Arbeit auf zyklische Schwankungen, so dass im Weiteren von der detaillierten Darstellung des erwähnten Wachstumsmodells abgesehen wird.

Im Gegensatz zu den linearen Gleichungen können lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen erster und zweiter Ordnung jedoch Zyklen erzeugen, und die anfänglichen Anstrengungen wurden demnach in diese Richtung gelenkt.[23] Beispiele hierfür sind das Modell von Frisch (1933) bzw. das Modell von Samuelson (1939).

In seinem Artikel „Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics"[24] konstruierte *Frisch* eines der ersten makrodynamischen Modelle, das wirtschaftliche Fluktuationen durch die Verwendung eines mathematischen Modells reflektierte.[25] Die Hauptidee dabei war, zwischen zwei grundlegenden Problemen – zwischen dem Ausbreitungs- und dem Impulsproblem – in der Analyse zyklischer Schwankungen zu unterscheiden. Frisch ging – in völliger Übereinstimmung mit der naturwissenschaftlichen Betrachtungsweise – davon aus, dass die Volkswirtschaft prinzipiell dynamisch stabil ist, so dass die intrinsische Struktur die Schwingungen dämpft (Ausbreitung), die durch die einzelnen Schocks (Impulse) verursacht werden. Derartige (exogene) Schocks treten jedoch in der Wirtschaftspraxis recht häufig auf, sie lassen die Ökonomie unter Umständen auch für längere Zeit schwanken.[26]

Frisch veröffentlichte sein großes Aufsehen erregendes Modell 1933, drei Jahre vor Erscheinen der Allgemeinen Theorie von Keynes, als die Multiplikator-Analyse noch nicht bekannt war. Dennoch stellt die Philosophie des Modells im Endeffekt das Konzept des Multiplikators in Form von Ausbreitung dar, wobei Frisch nicht weit

[22] Vgl. Heubes (1991), S. 170 ff.
[23] Vgl. Perona (2005), S. 33.
[24] Frisch (1933).
[25] Vgl. Zambelli (2004), S. 2.
[26] Vgl. Dal-Pont/Hagemann (200), S. 19.

davon entfernt war, ein vollkommen endogenes Konjunkturmodell zu erstellen. Auch Samuelson lobte Frischs Beitrag und verglich dessen Bedeutung für die Wirtschaftstheorie mit dem Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik.[27]

Samuelson verknüpfte in seinem 1939 publizierten Artikel „Interactions Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration"[28] den Akzelerator und den Multiplikator. In seinem formalen Modell untersuchte er die Interaktion zwischen dem linearen Multiplikator (in der Konsumfunktion) und dem linearen Akzelerator (in der Investitionsfunktion) und konnte damit die Natur der kurzfristigen Schwankungen erklären. Samuelsons Arbeit, die drei Jahre nach der Allgemeinen Theorie von Keynes erschien, war eine erste dynamische Formulierung des keynesianischen Ansatzes des Konjunkturzyklus.

Er ging von folgenden Zusammenhängen aus:

$$Y_t = g_t + C_t + I_t \tag{1.5}$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1} \tag{1.6}$$

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \tag{1.7}$$

wobei Y_t das Inlandsprodukt, g_t die Staatsausgaben, C_t den Konsum, und I_t die induzierten privaten Investitionen bezeichnen, α und β positive Parameter sind.

Aus den Ausgangsgleichungen des Modells kann die folgende lineare Differenzengleichung 2. Ordnung hergeleitet werden:

$$Y_t = g_t + \alpha(1+\beta)Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} \tag{1.8}$$

[27] Vgl. Desrosières (2005), S. 328.
[28] Samuelson (1939).

Deren qualitative Lösungen hängen von den Parametern des Systems ab.[29] Wenn bei der entsprechenden charakteristischen Gleichung komplexe Eigenwerte vorliegen, treten in jedem Fall Oszillationen auf. Schwingungen mit konstanter Amplitude bzw. gedämpfte oder explosive Schwingungen entstehen den Parameterwerten des Systems entsprechend. Schwingungen mit konstanter Amplitude sind jedoch nur für eine bestimmte Parameterkombination möglich, explodierende Schwingungen sind ökonomisch selten (Hyperinflation), dementsprechend sind in der Realität nur gedämpfte Schwingungen wahrscheinlich. Sie erfüllen allerdings den Wunsch nicht, anhaltende Oszillationen zu modellieren.[30]

Wenn das Modell von Harrod (1.1) - (1.4) mit dem von Samuelson (1.5) - (1.8) formal verglichen wird, ist das Wesen der vorherigen Aussage ersichtlich, nämlich, dass Verzögerungen zur Modellierung von Schwankungen nötig sind.

Es wurde bald erkannt, dass komplexere Modelle, die zu linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung führen, keine grundsätzlich verschiedenen Zeitpfade darstellen und auch keine qualitativ neuen Informationen implizieren.[31] Der lineare Ansatz war also zum Teil unbefriedigend, weil er keine befriedigende ökonomische Erklärung von Konjunkturzyklen lieferte, sondern sie auf externe, zufällige Ereignisse zurückführte. Zur Modellierung anhaltender Schwingungen waren andere Konzepte nötig.

In der Folge gab es eine Reihe von frühen Versuchen, den dynamischen Charakter der ökonomischen Theorien mit *nichtlinearen* Modellen, genauer formuliert, durch Systeme von Differenzen- und Differenzialgleichungen zu erfassen. Das von Káldor im Jahre 1940 vorgestellte Modell[32] ist als das erste nichtlineare Konjunkturmodell bekannt, die Modelle von Hicks (1950)[33] und Goodwin (1951)[34] gehören auch zu den frühesten nichtlinearen Modellen.[35]

[29] Vgl. Gabler (2000), S. 1783 und Perona (2005), S. 38.
[30] Vgl. Lorenz (1999), S. 378-379.
[31] Vgl. Perona (2005), S. 40.
[32] „A Model of the Trade Cycle".
[33] „A Contribution to the Theory of the Trade Cycle".
[34] „The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles".
[35] Gabler (2000), S. 1784.

Alle drei Modelle bestehen im Wesentlichen aus Differenzen- oder Differenzialgleichungen erster Ordnung. In diesen Modellen werden die Zyklen durch Interaktionen von verschiedenen Variablen generiert, die mittels mehrerer Gleichungen beschrieben werden. Dies führt letztendlich zu endogenen Schwankungen.

In den nichtlinearen Modellen ist dementsprechend die Erzeugung von Schwingungen ohne andauernde exogene Schocks endogen möglich, das Auftreten von anhaltenden Konjunkturzyklen kann ausschließlich mit der mathematischen Struktur der Modelle erklärt werden.[36]

Nichtlineare Modelle können verschiedene Typen von endogenen Fluktuationen erzeugen, unter anderem auch stabile Grenzzyklen[37], periodische Oszillationen und bei chaotischem Verhalten zufällige (irreguläre) Schwankungen. Darüber hinaus kann das gleiche nichtlineare Modell bei einer kleinen Änderung eines exogenen Parameters plötzlich qualitativ unterschiedliches Verhalten (Bifurkation) zeigen.

Heutzutage sind zahlreiche nichtlineare Modelle bekannt, die mithilfe einer breiten Palette an Methoden und Werkzeugen analysiert werden (Modelle unter Verwendung des Poincaré-Bendixson-Theorems, Modelle unter Verwendung der Bifurkationstheorien, Räuber-Beute-Modelle, neuere Ansätze wie z. B. Chaostheorie, Katastrophentheorie)[38]. In dieser Arbeit werden Modelle vom Räuber-Beute-Typ untersucht.

1.3 Nichtlineare dynamische Modelle vom Räuber-Beute-Typ

Wie Káldor, so musste auch Goodwin noch während seines Lebens erkennen, dass die einzige Möglichkeit, anhaltende Schwingungen zu modellieren, die Verwendung von nichtlinearen Funktionen war.[39]

[36] Vgl. Gabler (2000), S. 1784.
[37] Ein Grenzzyklus ist eine periodisch oszillierende, in sich geschlossene Trajektorie. Grenzzyklen können als Attraktoren der Bewegung interpretiert werden, zu denen dann alle Trajektorien hinlaufen, und sich als stabil erweisen [vgl. Boyce/DiPrima (1995), S. 628].
[38] Vgl. Gabler (2000), S. 1784.
[39] Perona (2005), S. 51.

In seinem oben schon erwähnten Artikel „The Non-Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles" (1951) begann Goodwin nichtlineare Modelle zu entwickeln, wobei er ein Konjunkturmodell mit nichtlinearem Akzeleratorprinzip und mit Investitionsverzögerung konstruierte und grafisch zeigte, dass es einen stabilen Grenzzyklus erzeugen kann, wenn ein stationärer Punkt lokal instabil ist.[40]

Goodwin verfolgte mehrere Wege in seiner Forschung zur nichtlinearen Dynamik. In seinem wohl berühmtesten Artikel „A Growth Cycle" (1967) hat er beispielsweise das nichtlineare Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra angewandt, um zu beschreiben, wie Veränderungen der Einkommensverteilung zu Schwankungen der Lohnquote und des Beschäftigungsgrades führen können.[41]

Das Lotka-Volterra- bzw. das Räuber-Beute-Modell – wie schon in der Einleitung kurz erwähnt – ist ein aus der Biologie übernommener Ansatz, nach dem sich zwei Variablen zueinander wie zwei interdependente Spezies in der Natur (Räuber und Beute) verhalten: Eine Variable (Räuber) kann nur bei ausreichendem Bestand der zweiten Variablen (Beute) existieren. Wenn die Anzahl der Räuber steigt, sinkt der Bestand an Beute und dadurch auch die zukünftige Zahl der Räuber. Durch das Sinken der Räuberpopulation verbessern sich nun aber die Bedingungen für die Beutepopulation, sodass deren Zahl steigen wird. Damit existieren wieder genügend Beuteindividuen, die den Räubern als Nahrungsmitteln dienen, sodass auch deren Zahl zunehmen wird, usw.[42]

Die erste mathematische Beschreibung dieses Problems stammt aus den zwanziger Jahren von Lotka (1925) und Volterra (1926). Die bekannteste ökonomische Anwendung geht etwa vierzig Jahre später auf Goodwin (1967) zurück. In demselben Jahr 1967 veröffentlichte Samuelson einen weniger bekannten Artikel, in dessen Mittelpunkt ebenfalls das Lotka-Volterra-Modell steht. Diese Arbeiten waren für lange Zeit als erste ökonomische Anwendungen des Lotka-Volterra-Modells bekannt.

[40] Vgl. Matsumoto (2009), S. 832.
[41] Vgl. Perona (2005), S. 51-52.
[42] Vgl. Gabler (2000), S. 2579.

Interessanterweise sah ein italienischer Ökonom, Giuseppe Palomba, aber viel früher, vielleicht als Erster, Zusammenhänge zwischen wirtschaftlichen Phänomenen und dem Lotka-Volterra-Modell. In seinem 1939 publizierten Buch[43] zeigt er, die Lotka-Volterra-Modellrahmen verwendend, dass selbsterhaltende Zyklen als Ergebnis von Interdependenzen zwischen Investitions- und Konsumgütern auftreten können. Mit der Herangehensweise folgte Palomba unter anderem dem Gedankengang von Marx[44] und Feldman[45], die die Dynamik der Wirtschaft auch mit der Verbindung von diesen zwei Gütergruppen untersuchten.

Hierzu ist zudem zu bemerken, dass Palombas nichtlineare Analyse beinahe vor dem Erscheinen der ersten nichtlinearen Modelle entstand, nämlich im gleichen Jahr, wie Samuelsons bereits erwähntes lineares Multiplikator-Akzelerator-Modell.

Lotka und Volterra schufen das nichtlineare Räuber-Beute-Modell fast gleichzeitig in den 20er Jahren. Dann mussten etwa vierzig Jahre bis zu den (allgemeiner) bekannten ökonomischen Anwendungen vergehen, also bis es von Goodwin bzw. von Samuelson in den 60er Jahren auf ökonomische Probleme angewandt wurde. Es stellt sich zum einen die Frage, was dazwischen geschah, wie die Modelle entstanden und welche theoriegeschichtliche Entwicklung genau stattgefunden hat.

Zum anderen ist es eine der wichtigsten Eigenschaften des Modells, dass es regelmäßige Zyklen beschreibt, die so in der Wirklichkeit nie erscheinen. Es stellt sich die Frage, warum dieses Modell dann so oft zitiert wird und auch im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht? Warum sollte von einer vollkommenen Version ausgegangen werden, wenn es sie in dieser Form nicht gibt? Diese Art von Modellen können als Grenzzustände zyklischer Entwicklungspfade angesehen werden. Das stellt sich in Analogie ähnlich dar, wie die allgemeine Gleichgewichtstheorie, die kurzfristig nicht wahr ist, trotzdem lassen sich die weitaus realistischeren Ungleichgewichtssituationen nur durch Vergleich mit dem Gleichgewicht definieren.

[43] Palomba (1939).
[44] Marx (1963), Kap.20, Abschnitt II.
[45] Feldman (1969).

Die Naturwissenschaft geht davon aus, dass Zyklen existieren und versucht die unregelmäßigen Schwankungen, die gegebenenfalls beobachtet werden können, auf die regelmäßigen Zyklen zu beziehen. Sie sucht also letztendlich danach – hinter den Zyklen nach den Grenzzuständen zyklischer Entwicklungspfade –, was hier der Ausgangspunkt ist.

In dieser Arbeit wird der gleiche Weg in die andere Richtung verfolgt: ausgehend von den regelmäßigen Zyklen sucht sie nach der Möglichkeit der allgemeinen Zyklen, ausgehend vom Lotka-Volterra-Modell sucht sie nach möglichen Verallgemeinerungen, bei denen die Grundeigenschaften des Modells erhalten bleiben.

2. Das Lotka-Volterra-Modell

2.1 Beschreibung des Modells

Das Lotka-Volterra-Modell der theoretischen Biologie, das auch als Räuber-Beute-Modell bekannt ist, beschreibt die Räuber-Beute-Wechselwirkung zweier Populationen mit einem System von zwei nicht-linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Der Ausgangspunkt ihrer Analyse ist die Tatsache, dass sich im gleichen Lebensraum lebende Räuber- und Beutepopulationen gegenseitig beeinflussen. Nimmt die Population einer Tierart ab, indem sie von der anderen gefressen wird, dann verändert sich dadurch die Räuberpopulation auch selbst zahlenmäßig. Eine kleinere Beutepopulation bedeutet für die Räuber weniger Nahrung und damit auch ungünstigere Verhältnisse für die eigene Reproduktion. Das Dezimieren der Beute führt somit zum Rückgang der eigenen Population. Dies geschieht allerdings in einer zyklischen Abfolge und sobald nur noch wenige Räuber vorhanden sind, erholt sich die Beutepopulation wieder. Eine perpetuierende wechselseitige Zu- und Abnahme der Bestände ergibt sich. Das Verhalten der beiden Populationen ist kurzfristig zwar antagonistisch, langfristig kann jedoch nur ihre Wechselwirkung die für sie beide notwendigen Lebensbedingungen sichern.

Das folgende System von nichtlinearen Differenzialgleichungen beschreibt die zahlenmäßige Veränderung der Populationen in der Zeit:[46]

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(d - cx) \tag{2.2}$$

$$(a, b, c, d > 0)$$

mit *x(t)* und *y(t)* als differenzierbare Funktionen der Zeit; sie stellen die Anzahl der Beute- bzw. Raubtiere dar. Im Modell wird also angenommen, dass die Beutetiere in

[46] Vgl. Boyce/DiPrima (1995), S. 601.

Abwesenheit der Räuber exponentiell mit dem konstanten Faktor a wachsen[47], die Anzahl der Räuber in Abwesenheit der Beute aber exponentiell mit der Wachstumsrate $-d$ abnimmt. Die Interaktion zwischen Räuber und Beute wird durch zwei Terme erfasst, die proportional zum Produkt (xy) sind. Diese gegenseitige Beeinflussung vermindert die Anzahl der Beutetiere, vermehrt aber die der Räuber; die entsprechenden Koeffizienten sind b und c.[48]

Die obigen Differenzialgleichungen (2.1)-(2.2) sind in der Literatur als *Lotka-Volterra-Gleichungen* bekannt.

2.2 Mathematische Eigenschaften des Modells

Das System (2.1)-(2.2) hat für $\dot{x} = \dot{y} = 0$ die *Gleichgewichtslagen* (Stationäre Punkte):

$$\dot{x} = ax - bxy = 0 \tag{2.3}$$[49]

$$x = 0 \text{ oder } y = \frac{a}{b} = y^* \tag{2.4}$$

woraus

$$\dot{x} = bx\left(y^* - y\right) \tag{2.5}$$

und

$$\dot{y} = -d \cdot y + cxy = 0 \tag{2.6}$$

$$y = 0 \text{ oder } x = \frac{d}{c} = x^* \tag{2.7}$$

woraus

$$\dot{y} = cy\left(x - x^*\right) \tag{2.8}$$

Das System hat einen (nicht-trivialen) Gleichgewichtspunkt mit positiven Werten für beide Variable, der die zeitliche Konstanz der Individuen der Populationen bedeutet.

---

[47] Die Annahme, dass in Abwesenheit des Räubers die Beutepopulation unbegrenzt wachsen soll, stellt zweifellos ein Problem dar.

[48] Vgl. Boyce/DiPrima (1995), S. 601 und Ortlieb (2009), S. 2-3.

[49] Der Punkt über der Variable symbolisiert deren Veränderung je Zeiteinheit, z. B.: $\dot{x} = dx/dt$.

Die Gleichgewichtslösung ist neutral stabil. Wenn sich das Räuber-Beute-System nicht im Gleichgewichtspunkt befindet, konvergiert es sich nicht gegen diesen Punkt, es handelt sich also beim Gleichgewichtspunkt nicht um einen Attraktor des Systems.

Um das **Stabilitätsverhalten** festzustellen[50], werden die Elemente der Jacobi-Matrix bestimmt:

mit $$\dot{x} = f(x,y) \text{ und } \dot{y} = g(x,y) \tag{2.9}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - by & -bx \\ cy & cx - d \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Im nicht trivialen Gleichgewicht ergibt sich daraus:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -b\frac{d}{c} \\ c\frac{a}{b} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Das Spur-Determinanten Kriterium hat das Ergebnis:

$$\text{Det } \mathbf{J} = ad > 0; \tag{2.12}$$

$$\text{Sp } \mathbf{J} = 0$$

und die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind dementsprechend imaginär:

$$\lambda_{1,2} = \frac{Sp}{2} \pm \sqrt{\frac{Sp^2}{4} - Det} = \pm i\sqrt{ad} \tag{2.13}$$

[50] Vgl. hierzu Boyce/DiPrima (1995), Kapitel 9.5; Hadeler (2004), Kapitel 2 und Meyer/Müller-Siebers/Ströbele (1998), Teil V.

Die Auswertung der Jacobi-Matrix ermöglicht *keine Aussagen* über das Stabilitätsverhalten des nichttrivialen Gleichgewichtspunktes.

Um Lösungskurven in der Form $y = y(x)$ darstellen zu können, verwendet man:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \tag{2.14}$$

(angenommen $\dot{x} = \frac{dx}{dt} \neq 0$).

Dies führt mit den Gleichungen (2.1)-(2.2) zu:

$$y' = \frac{-y(d-cx)}{x(a-by)} \tag{2.15}$$

Nach Trennung der Variablen

$$a\frac{y'}{y} - by' = -\frac{d}{x} + c \tag{2.16}$$

und Integration über *dx*

$$a \ln y - by + C = -d \cdot \ln x + cx \tag{2.17}$$

$$C = cx - d \cdot \ln x + by - a \ln y \tag{2.18}$$

wobei *C* eine Integrationskonstante ist.[51]

Dementsprechend kann gesagt werden, dass die Lösungskurven so verlaufen, dass der Ausdruck auf der rechten Seite (2.18) konstant bleibt. Sie entsprechen also den Höhenlinien eines Gebirges.

Es sei $$F(x(t), y(t)) = cx - d \cdot \ln x + by - a \ln y \tag{2.19}$$

[51] Vgl. Hadeler (2004), Kapitel 2.8 und Boyce/DiPrima (1995), Kapitel 9.5.

Dies bedeutet:

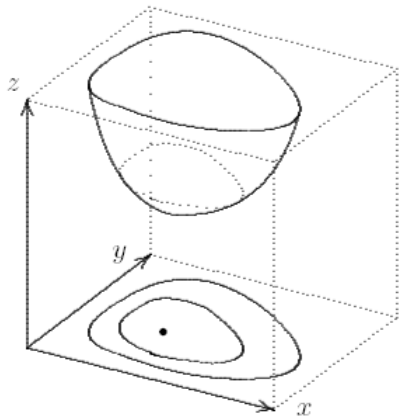
$$F(x(t), y(t)) = const, \qquad \text{für alle } t > 0 \tag{2.20}$$

$F(x, y)$ ist eine Bewegungsinvariante, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \dot{y} = 0 \tag{2.21}$$

Die Größe $F(x, y)$ ändert sich nicht in der Zeit entlang der Lösung.

Abbildung 2.1: Höhenlinien des „Gebirges“ *F(x,y)*



Quelle: Ringel (2002), S. 83.

Es lässt sich zeigen, dass das Gebirge $F(x, y)$[52] genau ein Minimum (bei $x = x^*, y = y^*$) hat[53]. Ansonsten bilden die Höhenlinien geschlossene Kurven um den stationären Punkt (x^*, y^*), wie Abbildung 2.1 zeigt.

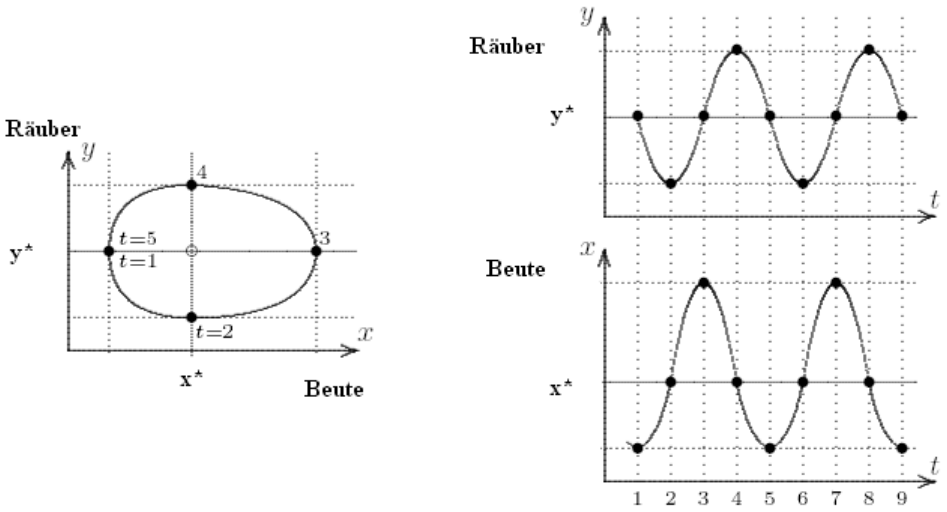
Jede Lösungskurve (bis auf die Koordinatenachsen und das nicht triviale Gleichgewicht) ist ein Zyklus. Die Anfangswerte von *x* und *y* bestimmen, welcher Zyklus aus einem Kontinuum von geschlossenen Phasenbahnen das dynamische Verhalten des Räuber-Beute-Systems beschreibt.

[52] Wir interessieren uns dabei nur für den ersten Quadranten ($x>0$, $y>0$).
[53] Vgl.Takeuchi (1996), S. 11.

Es lässt sich also zeigen, dass Lösungen des Systems existieren, die für feste Anfangswerte eindeutig und periodisch sind. Die Lösungskurven sind geschlossen (sie unterscheiden sich nur in ihrer Entfernung vom Mittelpunkt der stationären Lösung des Systems). Eine analytische Lösung ist jedoch nicht möglich, man kann sie nur mit Näherungsverfahren gewinnen.

Eine graphische Darstellung des Stabilitäts- und Schwingungsverhaltens findet sich in Abbildung 2.2 mit einem im Schnittpunkt (x^*, y^*) liegenden neutral stabilen Gleichgewicht. Ohne Störungen verbleibt das System auf ihrer Phasenbahn und erzeugt harmonische Schwingungen, also Schwingungen mit gleich bleibender Frequenz und Amplitude.

Abbildung 2.2: Schematisch dargestellte periodisch oszillierende Lösungen des Lotka-Volterra-Modells



Quelle: Ringel (2002), S. 85.

Das System oszilliert wie folgt: im Punkt 2 befindet sich die Beute im Gleichgewicht, die Räuberpopulation im Minimum. Deshalb kann sich die Beutepopulation noch bis zu einem Maximum vergrößern, das im Punkt 3 erreicht wird. Zur gleichen Zeit erleben die Räuber hervorragende Umweltbedingungen, ihr Bestand wächst, bis sie im Punkt 3 ein Gleichgewicht erreichen. Die Beutepopulation, die sich im Maximum befindet, nimmt in der Folge durch die Räuber weiter ab, bis sie im Punkt 4, wo die Räuber ihr Maximum haben, ein neues Gleichgewicht realisiert. Im Punkt 4 ist das Räuber-Beute-Verhältnis so, dass die Beutepopulation zur Ernährung der großen Zahl von Räubern zu klein ist. Der Druck auf die Beutetiere wird so stark, dass sich der Bestand einem

Minimum entgegen entwickelt, das im Punkt 5 ($\approx$ Punkt 1) erreicht wird. Zur gleichen Zeit nimmt die Räuberpopulation ab. Diese Vorgänge wiederholen sich periodisch, was die Oszillation der Räuber und Beute um eine mittlere Bestandsgröße erklärt.

Die Größen der Räuber- und Beutepopulation variieren also bei allen anderen Werten, als die Gleichgewichtslösung periodisch auf geschlossenen Kurven.

3. Lotka-Volterra-Modelle in der Volkswirtschaftslehre

Das Lotka-Volterra-Modell wurde – trotz oder vielleicht gerade wegen seiner Einfachheit – in verschiedenen Wissenschaften, darunter auch in den Wirtschafts-wissenschaften erfolgreich eingesetzt. Ökonomische Anwendungen sind unter anderem in der Konjunkturtheorie, in der ökonomischen Theorie regenerativer natürlicher Ressourcen, in der Innovations- sowie in der Regionalökonomik zu finden.

In diesem Kapitel werden diejenigen Lotka-Volterra-Modelle der Volkswirtschaftslehre vorgestellt, die im Folgenden als Grundlage für weitere Untersuchungen und für theoretische Erweiterungen dienen. Diese sind das vielleicht bekannteste Goodwin-Modell, eine weniger bekannte ökonomische Anwendung von Samuelson und das von Dietmar Meyer entwickelte Realkapital-Humankapital-Modell. Das Modell von Palomba, der nach unserem heutigen Wissen der Erste war, der die Lotka-Volterra Gleichungen in der Ökonomie verwandte, wird im nächsten, im dogmenhistorischem Kapitel vorgestellt.

3.1 Das Goodwin-Modell

Das Konjunkturmodell eines „Wachstumszyklus“ (A Growth Cycle)[54] vom amerikanischen Ökonomen Goodwin ist ein einfaches dynamisches Modell, in dem er eine Analogie zwischen der Entwicklung zweier voneinander abhängigen Tierpopulationen (vom Räuber-Beute-Typ) und der funktionalen Einkommensverteilung in einer Zwei-Klassen-Marktwirtschaft zog.

Goodwin stellte die Rivalität zwischen Arbeits- und Kapitaleignern in den Mittelpunkt seines Modells und zeigte, wie aus der Wechselwirkung von Beschäftigungsgrad und Lohnquote anhaltendes zyklisches Wachstum entsteht.

[54] Goodwin (1967).

3.1.1 Darstellung des Modells [55]

Das Modell bezieht sich nur auf die Realsphäre, es wird eine geschlossene Volkswirtschaft ohne Staatstätigkeit betrachtet, in der mit den homogenen Produktionsfaktoren Kapital und Arbeit bei voller Kapazitätsauslastung nur ein einziges – homogenes – Gut produziert wird.

Das erzielte Sozialprodukt wird aufgeteilt in Arbeitseinkommen und Kapitaleinkommen, also einerseits in Löhne und Gehälter, die verkonsumiert werden, und andererseits in Profit, der investiert den Kapitalstock erhöht. Es bezeichne

- K den Kapitalstock,
- Y das Sozialprodukt,
- I die Nettoinvestitionen (d.h. den Zuwachs des Kapitalstocks),
- $\hat{L}$ die Arbeitsnachfrage (Beschäftigung),
- L das Arbeitsangebot (Beschäftigungspotenzial),
- $v = \hat{L}/L$ die Beschäftigungsquote,
- w den Reallohnsatz,
- $u = w\hat{L}/Y$ die Lohnquote (d.h. den Anteil der Löhne am Sozialprodukt).

Laut dieser Definitionen gilt:

$$\dot{K}(t) = I(t) = Y(t) - w(t) \cdot \hat{L}(t) \tag{3.1}$$

Zur weiteren Analyse werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Das Arbeitsangebot L wächst mit der konstanten Wachstumsrate g_L .
- Die Arbeitsproduktivität A $(A=Y/\hat{L})$ wächst mit einer konstanten Wachstumsrate, bezeichnet mit g_A [56].
- Der Kapitalkoeffizient k ($k=K/Y$) ist konstant.

[55] Die folgende Darstellung basiert neben Goodwin (1967) auf Assenmacher (1998), Kapitel 6.3, Meyer (2005), Ortlieb (2009), Kapitel 1.8 und Wacker (2000).
[56] Dies impliziert den so genannten Harrod-neutralen technischen Fortschritt.

- Die Wachstumsrate des Reallohnsatzes *w* ist entsprechend der Phillips-Kurve eine streng monoton wachsende Funktion der Beschäftigungsquote: $\dot{w}/w = f(v)$ mit $f(0) < 0$, $df/dv > 0$ und $\lim_{v \to 1} f(v) = \infty$. Zur Vereinfachung wurde die Funktion f im Modell durch eine lineare Funktion approximiert:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\gamma_1 + \gamma_2 v(t) \tag{3.2}$$

$$\gamma_1, \gamma_2 > 0 \; ; \; \gamma_1, \gamma_2 = \text{konstant}$$

Nach entsprechenden Umformungen ergibt sich ein System von Differenzialgleichungen bezüglich der Variablen Lohnquote und Beschäftigungsgrad:

$$\dot{v}(t) = \left(\frac{1}{k} - g_A - g_L \right) v(t) - \frac{1}{k} v(t) u(t) \tag{3.3}$$

$$\dot{u}(t) = -(\gamma_1 + g_A) u(t) + \gamma_2 v(t) u(t) \tag{3.4}$$

Die beiden Differenzialgleichungen für *v* und *u* stellen offensichtlich ein einfaches Räuber-Beute-Modell vom Lotka-Volterra-Typ[57] dar, sofern $\frac{1}{k} > g_A + g_L$ [58].

Die Gleichungen beschreiben die Dynamik des Modells:

Hohes Wachstum ist dann zu beobachten, wenn die Sparquote und demgemäß die Investitionsquote hoch ist, d. h., die Kapitaleigner finanzieren mit ihren Ersparnissen das Wachstum des Kapitalstocks und schaffen dadurch Arbeitsplätze. Wenn der Kapitalstock nun schnell wächst und das freie Arbeitskräftepotenzial erschöpft ist, später sogar Arbeitskräftemangel entsteht, dann können die Lohnempfänger in der so entstandenen Wettbewerbssituation höhere Einkommen durchsetzen und schmälern damit das Kapitaleinkommen, auf dem letztendlich die Arbeitsplätze beruhen. Wegen der veränderten Einkommensverteilung zugunsten der Arbeitnehmer wird das

[57] Die Gleichungen haben die gleiche formale Struktur wie die Lotka-Volterra-Gleichungen (2.1)-(2.2).
[58] Dies trifft für realitätsnahe Werte immer zu.

Wachstum langsamer, was sich in der begrenzten Möglichkeit der Schaffung von Arbeitsplätzen manifestiert. Die Beschäftigung sinkt so lange, bis die sinkenden Löhne die Profite wieder erhöhen.

Die beiden endogenen Variablen des Systems, die Lohnquote und der Beschäftigungsgrad oszillieren – analog wie im Lotka-Volterra-Modell – periodisch um die Gleichgewichtswerte. Die Amplituden der Schwingungen hängen von den Anfangswerten ab. Mit Ausnahme des Wachstumsgleichgewichts (v^*, u^*) (und der ökonomisch wenig interessanten Randlösungen) beschreibt jede Lösung eine geschlossene Kurve im *v*-*u* Diagramm (vgl. Abbildung 3.1, Konservative Bewegung).

Der (nicht-triviale) Gleichgewichtspunkt des Systems ist:

$$v^* = \frac{\gamma_1 + g_A}{\gamma_2} \tag{3.5}$$

und

$$u^* = 1 - k\left(g_A + g_L\right) \tag{3.6}$$

Diese Lösung bedeutet, dass eine bestimmte Lohnquote existiert, so dass die verbleibenden Gewinne ausreichen, eine bestimmte Beschäftigungsquote zu sichern.

Die Modellstruktur basiert mathematisch auf einem System nicht-linearer Differenzialgleichungen, das konservativ ist, und die durch die geschlossenen Kurven repräsentierten Lösungen sind neutral stabil. Die ökonomische Bedeutung des Modells liegt im Vergleich zu den linearen Modellen darin, dass exogene Schocks keinen Einfluss auf die qualitative Ausgestaltung der Zyklen haben, sondern nur auf ihr quantitatives Erscheinungsbild. Exogene Schocks bedeuten im Zeitpunkt ihres Auftretens neue Anfangsbedingungen, die eine neue (konzentrische und gestaltsgleiche) geschlossene Lösungskurve festlegen. Auf der anderen Seite kann als Nachteil des Modells erwähnt werden, dass auch die Amplituden der Schwankungen nur von den Anfangsbedingungen abhängen, wodurch die Charakteristika eines Konjunkturzyklus nicht vollständig modellendogen erklärt werden können.

3.1.2 Die Räuber-Beute Analogie

Mit dem Instrumentarium des Lotka-Volterra-Modells beschreibt Goodwin also die Interaktion von Schwankungen der Beschäftigungsquote und der Lohnquote in seinem Modell, wobei aufgrund der identischen formalen Struktur die Beschäftigungsquote *v* der Beute- und die Lohnquote *u* der Räuberpopulation entspricht.[59]

Das Goodwin-Modell wird in der Literatur oft in die Klasse der marxistischen Konjunkturmodelle eingeordnet[60], da die Einkommens- oder Klassengegensätze im kapitalistischen System ein wesentliches Erklärungselement des Modells sind. Nach Goodwinscher und teils auch marxistischer Auffassung ist der Räuber-Beute-Ansatz charakteristisch für den Verteilungskampf der Kapitalisten und der Arbeiter.[61] Die Interessen der beiden Klassen sind kurzfristig gegenseitig, langfristig jedoch komplementär – zumindest in der Interpretation von Goodwin.[62] Die kurzfristige Gegenseitigkeit der Interessen erscheint im Verteilungskampf, die langfristige Komplementarität im Streben der Kapitalisten nach ausreichenden Gewinnen zur Schaffung von Arbeitsplätzen.

Nach Goodwins Ansicht aber gefährdet dieser Konflikt, im Unterschied zu Marx, das Weiterbestehen des Wirtschaftssystems nicht, sondern ist die treibende Kraft anhaltender Konjunkturschwankungen.[63]

---

[59] Solow gibt zwei alternative Interpretationen der Räuber-Beute Analogie vgl. Solow (1990), S. 35-36. In der ersten sind die Arbeiter (Lohnempfänger) identifiziert mit der Beschäftigungsquote *v*, die Räuber und die Kapitalisten identifiziert mit der Profitquote (*1-u*), die Beute. Hoher Profit – große Beutepopulation – bedeutet eine dementsprechend hohe Investitionsquote und wachsende Beschäftigung, d.h. wachsende Räuberpopulation.
Nach der zweiten Interpretation besteht der wahre Konflikt zwischen den mit der Lohnquote *u* identifizierten Arbeitnehmern, die möglichst hohe Löhne durchsetzen wollen, und den Arbeitslosen, die eine wachsende Beschäftigungsquote *v* präferieren. Laut dieser Interpretation entsprechen die Beschäftigten den Räubern, während die Arbeitslosen der Beute. Die Kapitalisten sind hier passive Akteure.

[60] Vgl. z. B. Assenmacher (1998), S. 215.

[61] „Capitalism as a Dynamic Conflict" vgl. Lancaster (1973), S. 1092;
„Marx developed the idea of a cyclical interaction of accumulation, employment and income distribution between workers and capitalists" vgl. Glombowski/Krüger (1988), S. 1.

[62] Wie Goodwin schreibt „This inherent conflict and complementarity of workers and capitalists is typical of symbiosis." Goodwin(1972), S. 448.

[63] Vgl. Hagedorn/Keller (1997), S. 6.

3.2 Samuelsons Aufsatz

Samuelson publizierte seinen Aufsatz mit dem Titel „A Universal Cycle"[64] ebenfalls 1967– also im gleichen Jahr wie Goodwin seinen „Growth Cycle". Samuelson geht ebenfalls von den Lotka-Volterra-Gleichungen aus und weist ebenfalls auf deren Bedeutung für die Theorie des zyklischen Wachstums hin, behandelt jedoch inhaltlich andere Fragen als Goodwin.

3.2.1 Darstellung des Modells

Die Lotka-Volterra-Gleichungen haben hinsichtlich der Modellierung realer Phänomene eine wenig wünschenswerte Eigenschaft, nämlich die strukturelle Instabilität. Diese Tatsache ist der Ausgangspunkt von Samuelsons Artikel über den „Universal Cycle".

Im ersten Teil seiner Studie behandelt Samuelson das Lotka-Volterra-Grundmodell.

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} = a_1 - a_{12} X_2 \tag{3.7}$$

$$a_1, a_{12} > 0$$

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} = -a_2 + a_{21} X_1 \tag{3.8}$$

$$a_2, a_{21} > 0$$

Dann erweitert er das ursprüngliche Modell zuerst durch die in der vorherrschenden Ökonomie üblichen sinkenden Skalenerträge[65]. Diese sinkenden Skalenerträge verändern zwar die zyklische Entwicklung der Variablen nicht, führen aber zu gedämpften Schwingungen,

[64] Samuelson (1967).
[65] Im Goodwin-Modell wird dagegen stillschweigend lineare Technologie angenommen.

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} = a_1 - a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \tag{3.9}$$

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} = -a_2 + a_{21}X_1 - a_{22}X_2 \tag{3.10}$$

$$a_i, a_{ij} > 0$$

(Zunehmende Skalenerträge können mit umgekehrtem Vorzeichen von a_{11} und a_{22} berücksichtigt werden.)

Schließlich werden die sinkenden und zunehmenden Skalenerträge kombiniert, wobei das die Eigendynamik beschreibende lineare Glied $a_{ii}X_i$ durch den nichtlinearen Ausdruck $\lambda R_i(X_i)$ ersetzt wird,

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} = A_1 + \lambda R_1(X_1) - A_{12}X_2 \tag{3.11}$$

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} = -A_2 + A_{21}X_1 + \lambda R_2(X_2) \tag{3.12}$$

$$A_i, A_{ij} > 0$$

mit $R_i'(X_i) > 0$ für $X_i < \overline{X}_i > X_i^*$, ($i$=1,2)

$R_i'(X_i) < 0$ für $X_i > \overline{X}_i$,

$R_i(\infty) = -\infty$.

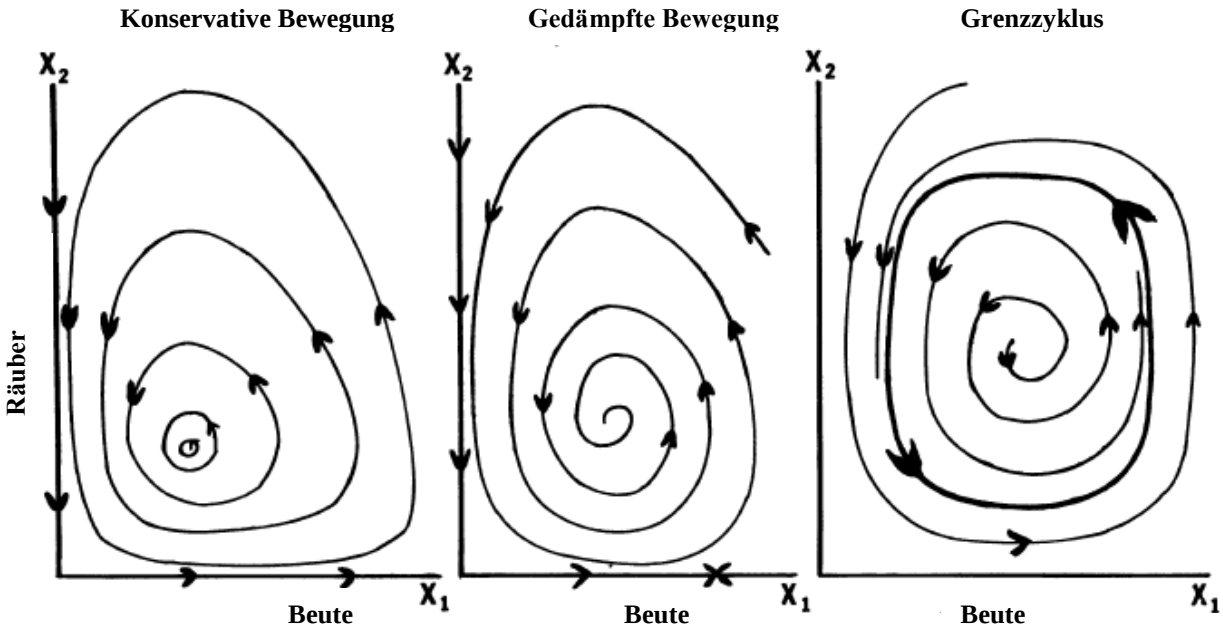
wobei mit $\overline{X}_i$ die Maximumpunkte bezeichnet werden.

Eine graphische Darstellung der Phasenporträts von diesen mit den drei unterschiedlichen Differenzialgleichungssystemen beschriebenen Systemen findet man in Abbildung 3.1. Daraus geht hervor:

(3.7)-(3.8): Konservative Schwingung nach dem ursprünglichen Lotka-Volterra-Modell, mit anderen Worten der Messers Schneide-Fall wegen der neutralen Stabilität;
(3.9)-(3.10): Stabile Spirale unter Berücksichtigung sinkender Skalenerträge;

(3.11)-(3.12): Grenzzyklus unter Berücksichtigung sinkender und in der Nähe des Gleichgewichts zunehmender Skalenerträge.

Abbildung 3.1: Phasenporträts



Quelle: Samuelson (1971), S. 982.

Aus dem zuvor Gesagten folgt, dass das von Samuelson entwickelte Modell als Prototyp der Grenzzyklen erzeugenden Konfliktmodelle betrachtet werden kann. Der Autor selbst war der Meinung, dass es möglich sei, einen grundsätzlichen zyklischen Mechanismus zu finden, der fast unabhängig von den jeweiligen institutionellen Bedingungen funktionieren könnte. Wenn man zwei permanente Eigenschaften des Wirtschaftslebens – Ausbeutung und zunehmende Skalenerträge – postuliert, kann man einen permanenten Konjunkturzyklus mit einer konstanten Schwingungsamplitude sowie -periode herleiten. Diese Ansicht weicht deutlich vom Marxschen Bild über die dynamische Natur der kapitalistischen Wirtschaftsentwicklung ab.[66]

[66] Marx spricht über den tendenziellen Fall der Profitrate. Dies ist im Wesentlichen eine logische Konsequenz der Marxschen Definition des Mehrwertes bzw. des Profits. Bei Marx ist die Arbeit die Grundlage des Mehrwertes und des Profits. Aufgrund dessen kann sein Gedankengang wie folgt zusammengefasst werden: Der Wettbewerb zwingt die Kapitalisten zu erhöhten Investitionen, der Anteil des konstanten Kapitals wird im gesamten Kapital höher. Dadurch wird der Anteil des variablen Kapitals, also der der Arbeit geringer. Dementsprechend verringern sich nach Marx der Mehrwert und die Profitrate. Kurz mit Worten von Marx zusammengefasst: „Die Profitrate fällt nicht, weil die Arbeit unproduktiver, sondern weil sie produktiver wird." [vgl. Marx (1964), S. 250.]

3.2.2 Analyse der Modelle im Aufsatz von Samuelson

Samuelson betrachtet zuerst das Lotka-Volterra-Grundmodell (3.7)-(3.8). Wie er bemerkt: die hübschen Formalismen oben dürfen uns über die Tatsache nicht hinwegtäuschen, dass der Lotka-Volterra Existenzkampf alles über die Begrenzung von Land und anorganischen Elementen in der Umwelt vergessen hat.[67]

Samuelson zeigt danach, dass die konservativen periodischen Bewegungen des Grundmodells sehr empfindlich auf Änderungen in der institutionellen Praxis reagieren. Er zeigt, dass die Berücksichtigung der sinkenden (und / oder zunehmenden) Skalenerträge in einem allgemeinen Lotka-Volterra-Modellrahmen den konservativen Charakter des Systems zerstören kann. Er behandelt zwei Modifikationen: die erste ist ein Räuber-Beute-Modell mit logistischem Wachstum[68] (3.9)-(3.10).

Samuelson ergänzt bei dieser **ersten Modifikation** die erste Gleichung des Grundmodells (3.7) mit dem Term $(-a_{11}X_1)$, um den Effekt sinkender Erträge der Beute zu charakterisieren, und die zweite Gleichung (3.8) mit dem Term $(-a_{22}X_2)$, der den Crowding-Effekt der Räuber beschreibt.

Die nicht triviale Gleichgewichtslösung des Systems ist:

$$X_1^{**} = \frac{a_1 a_{22} + a_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}} \tag{3.13}$$

und

$$X_2^{**} = \frac{-a_{11} a_2 + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}} \tag{3.14}$$

Wenn diese Gleichgewichtslösung mit der Gleichgewichtslösung des Grundmodells ohne Dichteabhängigkeit verglichen wird $(X_1^* = \frac{a_2}{a_{21}};\ X_2^* = \frac{a_1}{a_{12}})$, sieht man sofort, dass sinkende Skalenerträge den Wert der Gleichgewichtslösung der Räuber eindeutig

[67] Samuelson (1971), S. 982 (eigene Übersetzung).
[68] Mit der logistischen Gleichung nach Verhulst-Pearl (vgl. Samuelson (1967), S. 314) ist es möglich, beschränktes Wachstum einer Population infolge begrenzter Kapazität des Lebensraumes zu berücksichtigen. Mehr dazu im Kapitel 5.

gesenkt haben. Der Wert der Gleichgewichtslösung der Beute wird größer, wenn die Relation

$$\frac{a_1 a_{21}}{a_2} > a_{11} \tag{3.15}$$

erfüllt ist.

Um die Stabilität des Systems (3.9)-(3.10) im Gleichgewichtspunkt analysieren zu können, wird das System um den Gleichgewichtspunkt linearisiert. Man findet die Eigenwerte des linearisierten Systems als Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Das charakteristische Polynom des linearisierten Systems ist im Gleichgewichtspunkt $\left(X_1^{**}, X_2^{**}\right)$:

$$\lambda^2 + \lambda\left(a_{11}X_1^{**} + a_{22}X_2^{**}\right) + X_1^{**}X_2^{**}\left(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}\right) = 0 \tag{3.16}$$

Da die beiden Eigenwerte negative Realteile haben, ist die Ruhelage auf jeden Fall asymptotisch stabil. Demzufolge kann die Dynamik in der Nähe des Gleichgewichtspunktes entweder eine Spirale (Eigenwerte sind komplex), oder ein Knoten sein (Eigenwerte sind reell).

Im Rahmen der ersten Modifikation beschäftigt sich Samuelson auch mit den zunehmenden Skalenerträgen, die mit umgekehrtem Vorzeichen von a_{11} und a_{22} berücksichtigt werden können, d. h. die erste Gleichung des Grundmodells wird mit dem Term $(a_{11}X_1)$, die zweite Gleichung mit dem Term $(a_{22}X_2)$ ergänzt:

$$\frac{\dot{X}_1}{X_1} = a_1 + a_{11}X_1 - a_{12}X_2 \tag{3.17}$$

$$\frac{\dot{X}_2}{X_2} = -a_2 + a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \tag{3.18}$$

$$a_i, a_{ij} > 0$$

Die nicht triviale Gleichgewichtslösung dieses Systems ist:

$$\overline{X}_1^{**} = \frac{-a_1 a_{22} + a_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}} \tag{3.19}$$

und

$$\overline{X}_2^{**} = \frac{a_{11} a_2 + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21}} \tag{3.20}$$

Wenn diese Gleichgewichtslösung mit der Gleichgewichtslösung des Grundmodells ohne Dichteabhängigkeit verglichen wird $(X_1^* = \frac{a_2}{a_{21}};\ X_2^* = \frac{a_1}{a_{12}})$, sieht man, dass zunehmende Skalenerträge den Wert der Gleichgewichtslösung der Beute gesenkt haben. Der Wert der Gleichgewichtslösung der Räuber wird größer, wenn die Relation

$$\frac{a_2 a_{12}}{a_1} > a_{22} \tag{3.21}$$

erfüllt ist.

Das charakteristische Polynom des linearisierten Systems ist im Gleichgewichtspunkt $\left(\overline{X}_1^{**}, \overline{X}_2^{**}\right)$:

$$\lambda^2 - \lambda\left(a_{11}\overline{X}_1^{**} + a_{22}\overline{X}_2^{**}\right) + \overline{X}_1^{**}\overline{X}_2^{**}\left(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}\right) = 0 \tag{3.22}$$

Wenn $a_{ii} > 0$, gibt es immer einen Eigenwert mit positivem Realteil, und die Ruhelage ist dementsprechend instabil, was wiederum instabile Spirale oder instabile Knoten bedeutet, je nachdem, ob die Eigenwerte komplexe oder reelle Zahlen sind.

Die von Samuelson behandelte **zweite Modifikation**, das Grenzzyklen erzeugende System (3.11)-(3.12) hat im Vergleich zum Lotka-Volterra Grundmodell (3.7)-(3.8) einen einzigen Unterschied, die Einbeziehung der zwei konkaven Funktionen $\lambda R_1(X_1)$

bzw. $\lambda R_2(X_2)$, die die vorher schon erwähnten beiden Kräfte (Skaleneffekte und physische Begrenzung) repräsentieren müssen.

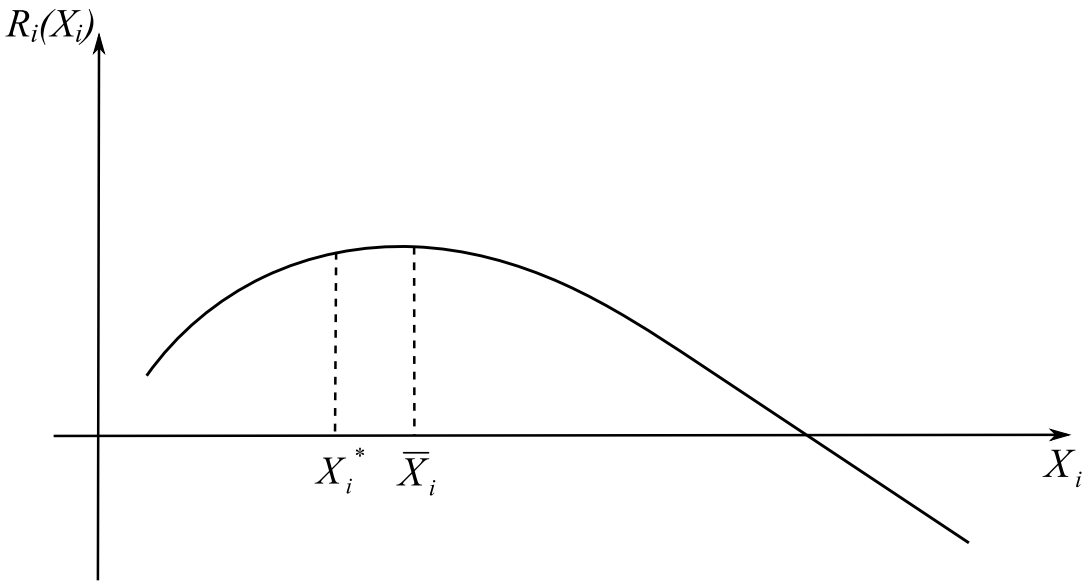
Samuelsons Absicht war, ein sehr allgemeines Phänomen darzustellen, wobei die Bedingungen für die funktionale Form von $\lambda R_i(X_i)$ die folgenden sind:

- $R_i'(X_i) > 0$ für $X_i < \overline{X}_i$ mit $\overline{X}_i > X_i^*$,
- $R_i'(X_i) < 0$ für $X_i > \overline{X}_i$,
- $R_i''(X_i) < 0$
- $R_i(\infty) = -\infty$.

wo mit $\overline{X}_i$ die Maximumpunkte der Funktionen $\lambda R_1(X_1)$, und mit X_i^* die Gleichgewichtspunkte des gesamten Systems bezeichnet werden, $i = 1,2$. (Wenn $\lambda = 0$ ist, erhalten wir das Lotka-Volterra-Grundmodell.)

Im Wesentlichen verlangt Samuelson, dass die vorgeschlagenen Funktionen ähnlich der in Abbildung 3.2 dargestellten Grafik sind:

Abbildung 3.2: Form der Funktion $R_i(X_i)$ im erweiterten Modell



Quelle: Eigene Darstellung

Der (nicht-triviale) Gleichgewichtspunkt des Systems ist:

$$X_1^* = \frac{A_2 - \lambda R_2(X_2)}{A_{21}} \tag{3.23}$$

und

$$X_2^* = \frac{A_1 + \lambda R_1(X_1)}{A_{12}} \tag{3.24}$$

Die Jacobi-Matrix des Systems, linearisiert im Gleichgewicht ist:

$$\mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) = \begin{bmatrix} \lambda X_1^* R_1'(X_1^*) & -A_{12}X_1^* \\ A_{21}X_2^* & \lambda X_2^* R_2'(X_2^*) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

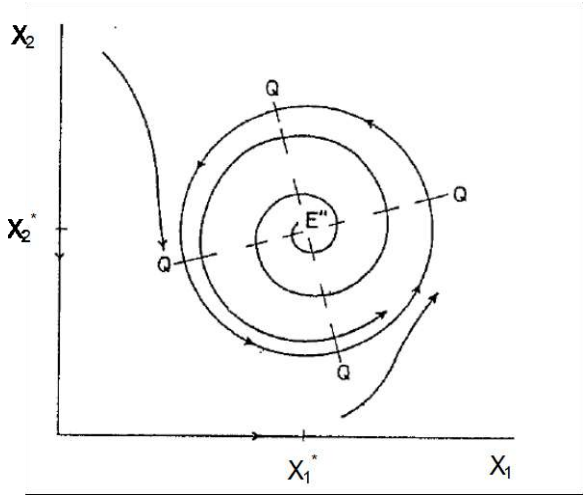
Die Elemente der Jacobi-Matrix im (positiven) Gleichgewichtspunkt (X_1^*, X_2^*) mit Berücksichtigung der Bedingungen für die funktionale Form von $\lambda R_i(X_i)$ werden die folgenden Vorzeichen haben:

$$\mathbf{J}(X_1^*, X_2^*) = \begin{bmatrix} + & - \\ + & + \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Spur positiv ist, woraus folgt, dass der Gleichgewichtspunkt instabil ist (instabile Spirale oder instabiler Knoten). Für kleine positive Werte von λ entfernt man sich vom Gleichgewichtspunkt über eine instabile Spirale. Die nach außen wachsende Spirale kann aber bis unendlich große Amplituden nicht wachsen, da die $\lambda R_i(X_i)$-Funktionen aufgrund der Annahmen schließlich stark abnehmende Skalenerträge haben. Intuitiv – wie Samuelson schreibt – kann man sehen, dass ein oder mehrere Grenzzyklen notwendigerweise impliziert werden.[69] Für alle positiven Werte von (X_1, X_2) mit Ausnahme von (X_1^*, X_2^*) wird sich das System im Grenzbereich der in Abbildung 3.3 dargestellten geschlossenen Kontur (*QQQQ*) nähern.

[69] Samuelson (1967), S. 319.

Abbildung 3.3: Stabiler Grenzzyklus



Quelle: Samuelson (1967), S. 319.

Unabhängig also von den Anfangsbedingungen (außer des Gleichgewichtspunktes), wird das System einen zyklischen Trend haben, sich einem Grenzzyklus mit einer konstanten Amplitude nähern.

Darüber hinaus wird eine kleine Änderung in einem der Koeffizienten des Systems die Periodizität nicht zerstören, wie das der Fall bei den konservativen Schwingungen des ursprünglichen Lotka-Volterra-Modells ist.[70]

3.2.3 Unterschiede zwischen Samuelsons und Goodwins Modell

Während *Goodwin* auf der Suche nach einem Zusammenhang war, der erläutert, wie sich bestimmte ökonomische Variablen im Laufe der Zeit bewegen, schlug *Samuelson* ein Modell vor, das im allgemeinen die Konjunkturentwicklung erklären würde. (Sein Artikel hat in der Tat den Titel "A Universal Cycle?"/Ein Universalzyklus?/.)

Samuelson interessierte sich wie Goodwin auch aus methodischen Gründen für die Lotka-Volterra-Gleichungen. Er wies aber an anderer Stelle auch darauf hin, dass es immer die von ihm analysierten ökonomischen Probleme waren, die die

[70] Samuelson (1971), S. 983.

mathematischen Fragen determinierten, mit denen er sich beschäftigte und nicht umgekehrt.[71]

In dem Aufsatz „A Universal Cycle" steht nun zweifellos die formale Analyse im Vordergrund, die ökonomische Beziehung dient eher als Rahmen der Untersuchung, die Parameter werden nicht näher spezifiziert. Samuelson verallgemeinert das Lotka-Volterra-Modell und in der zweiten Hälfte seines Aufsatzes gelangt er unter Berücksichtigung zuerst sinkender dann steigender Skalenerträge über gedämpfte Schwingungen zu den Grenzzyklen.

Im Vordergrund des *Goodwin*-Modells steht dagegen das ökonomische Problem. Die Modellgleichungen des Goodwin- und Lotka-Volterra-Modells haben eine formale Identität. Die geschlossenen Lösungskurven können folglich keine Grenzzyklen ergeben.

Goodwin erörterte seine Gedanken im Sinne von Marx, sein Modell, wie in der Literatur öfter erwähnt wird, ist eigentlich eine elegante dynamische Formalisierung der Marxschen Theorie des Verteilungskonflikts.[72]

Samuelsons Meinung nach war der Aufsatz „A Universal Cycle" eine Art Parodie. Er glaubte nicht im Ernst daran, dass der Marxsche Klassenkampf mit der Räuber-Beute-Dynamik verglichen werden kann.[73] Anlässlich des hundertsten Jahrestages des Erscheinens des I. Bandes von *Das Kapital* kann der „Meister" dadurch parodiert werden, dass ein zyklischer Mechanismus gefunden wird, der fast unabhängig von den institutionellen Bedingungen funktionieren kann.[74]

[71] „My economic problems dictated where my math preoccupations should go - not vice versa." Zitiert nach Barnett (2004), S. 534.
[72] Vgl. Veneziani/Mohun (2006), S. 438.
[73] Vgl. Brief von Samuelson an die Autorin im Anhang 1.
[74] Vgl. Samuelson (1967), S. 307.

3.2.4 Kann auch das Goodwin Modell „à la Samuelson“ erweitert werden?

3.2.4.1 Erste Modellerweiterung – sinkende bzw. steigende Skalenerträge

Samuelsons erste Modellerweiterung bedeutet formal die Erweiterung der Lotka-Volterra-Gleichungen mit dem linearen Glied $a_{ii}X_i$.

Auch im Goodwin-Modellrahmen ist formal gesehen eine ähnliche Erweiterung vorstellbar. Um die Variabilität der Wachstumsrate des Beschäftigungspotenzials kann das Goodwin-Modell erweitert werden. Es wird dabei angenommen, dass die Wachstumsrate des Beschäftigungspotenzials (g_L) nicht mehr konstant ist, wie im ursprünglichen Modell von Goodwin, sondern die Beschäftigungsquote einen Einfluss auf die Wachstumsrate des Beschäftigungspotenzials hat: je größer die Beschäftigungsquote ist, desto größer ist die Wachstumsrate des Beschäftigungspotenzials. Falls ein linearer Zusammenhang angenommen wird:

$$g_L = \alpha + \beta v(t) \tag{3.27}$$

$$\alpha, \beta > 0 \ ; \ \alpha, \beta = \text{konstant}$$

Wenn alle anderen Annahmen des ursprünglichen Modells unverändert bleiben, ergibt sich im erweiterten Modell nach entsprechenden Umformungen ein System von Differenzialgleichungen bezüglich der Variablen Lohnquote und Beschäftigungsgrad:

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \left(\frac{1}{k} - g_A - \alpha\right) - \beta v(t) - \frac{1}{k}u(t) \tag{3.28}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -(\gamma_1 + g_A) + \gamma_2 v(t) \tag{3.29}$$

Das Differenzialgleichungssystem (3.28)- (3.29) hat eine identische formale Struktur mit den Gleichungen (3.9)-(3.10) der ersten Modellerweiterung von Samuelson.
In diesem Sinne ist der Gleichgewichtspunkt asymptotisch stabil, das System weist also gedämpfte Schwingungen auf.

Im ökonomischen Modellrahmen von Goodwin können abnehmende oder zunehmende Skalenerträge inhaltlich durch die Annahme berücksichtigt werden, dass sich der Kapitalkoeffizient ($k = K/Y$) mit Y ändert. So eine Erweiterung steht im Mittelpunkt einer Beitragsreihe von Galeotti und Gori[75].

Bei ihren Herangehensweisen bleiben alle Annahmen des Modells unverändert, nur das Sozialprodukt ist jetzt eine quadratische Funktion des Kapitalstocks. Mit den im Kapitel 3.1.1 verwendeten Bezeichnungen:

$$Y(t) = \frac{K(t)}{k} + hK^2(t) \tag{3.30}$$

und mit $h > 0$ für zunehmende, und $h < 0$ für abnehmende Skalenerträge.
Nach entsprechenden Umformungen ergibt sich das folgende System von Differenzialgleichungen:

$$\dot{K}(t) = (1 - u(t))\left(\frac{K(t)}{k} + hK^2(t)\right) \tag{3.31}$$

$$\dot{v}(t) = -(g_A + g_L)v(t) + \left(\frac{1}{k} + 2hK(t)\right)(1 - u(t))v(t) \tag{3.32}$$

$$\dot{u}(t) = -(\gamma_1 + g_A)u(t) + \gamma_2 v(t)u(t) \tag{3.33}$$

Die drei Gleichungen (3.31)-(3.33) für die zeitliche Entwicklung des Kapitalstocks sowie der Beschäftigungsquote und Lohnquote stellen jetzt das Differenzialgleichungssystem des dreidimensionalen Modells dar. Es ist aber kein erweitertes Lotka-Volterra-Modell mehr im Samuelsonschen Sinne. Samuelson untersuchte zwei Gleichungen, die dritte Gleichung stellt aber eine neue Qualität dar.

[75] Galeotti/Gori (1990a) und (1990b).

3.2.4.2 Zweite Modellerweiterung – Grenzzyklus

Samuelsons zweite Modellerweiterung bedeutet formal die Erweiterung der Lotka-Volterra-Gleichungen mit der konkaven Funktion $\lambda R_i(X_i)$.[76]

Im Goodwinschen Modellrahmen ist die Einbeziehung der Funktionen $\lambda R_1(v)$ und $\lambda R_2(u)$ mit den von Samuelson spezifizierten Eigenschaften aus ökonomischer Sicht nicht vorstellbar. Bei den zwei Variablen des Goodwin-Modells, bei der Lohnquote (u) und der Beschäftigungsquote (v) sind nur Werte kleiner gleich 1 realistisch[77], dementsprechend können die R Funktionen für beliebig große Werte der unabhängigen Variablen u bzw. v nicht definiert werden.

In der Literatur sind weitere Grenzzyklen erzeugende Erweiterungen des Goodwin-Modells bekannt,[78] diese Beiträge gehen aber von anderen Annahmen aus und verfolgen nicht Samuelsons Grundidee.

Obwohl Samuelson seinen Aufsatz „A Universal Cycle" und Goodwin seinen „Growth Cycle" im gleichen Jahr publizierten, behandeln sie hauptsächlich andere Fragen. Goodwins Modell kann nicht Samuelsons zweiter Modellerweiterung entsprechend weiterentwickelt werden. Dies gilt auch für sämtliche Modelle vom Lotka-Volterra-Typ, wo die Variablen Anteile / Verhältnisse angeben. Samuelsons Untersuchung gibt in diesem Sinne keine Antwort auf Verteilungsprobleme.

3.3 Das Realkapital-Humankapital-Modell

Dieses ökonomische Modell vom Lotka-Volterra-Typ wurde von Dietmar Meyer entwickelt,[79] die zwei endogenen Variablen des Modells sind das Real- und das Humankapital.

---

[76] $R_i(X_i)$ Funktionen, die über die von Samuelson spezifizierten Eigenschaften verfügen, sind in der Räuber-Beute-Literatur zu finden, z. B.: Wang/Shi/Wei (2011).
[77] Bei der Beschäftigungsquote stellt das Beschäftigungspotential keine fixe Grenze dar und auch größere Werte als 1 sind – zumindest vorübergehend – theoretisch vorstellbar (z. B. bei Überstunden).
[78] Z. B. Chiarella (1990), Sportelli (1995), Farkas/Kotsis (1992).
[79] Meyer (2002).

Zuerst wird ein Solow-Wachstumsmodell in einer Zwei-Sektoren-Wirtschaft untersucht, mit der sog. AK-Technologie. Die Grundgleichung des Modells lautet dann:

$$\dot{k}(t) = [sA - (g_L + \delta)]k(t) \tag{3.34}$$

wo k den realen Pro-Kopf-Kapitalstock, s die konstante Sparquote, δ die auch konstante Abschreibungsrate des Realkapitals, g_L die exogen gegebene konstante Wachstumsrate der Bevölkerung bezeichnet. Der positive Parameter A bringt das Technologieniveau zum Ausdruck.

Im Falle einer effizienten Technologie wächst der Pro-Kopf-Kapitalstock, k exponentiell. Dies ist dann der Fall, wenn

$$A > (g_L + \delta)/s \ ^{80} \tag{3.35}$$

Betrachten wir jetzt das Humankapital $\tau(t)$ im AK-Modell. Es wird angenommen, dass die Wachstumsrate des technischen Fortschritts (des technologischen Wissens, oder des Humankapitals) eine lineare Funktion der Arbeitsproduktivität ist, d.h.:

$$\dot{\tau}(t) = \left[-\alpha + \beta \frac{Y(t)}{L(t)} \right] \tau(t) \tag{3.36}$$

wobei α und β positive Konstante sind.

Nach Umformen:

$$\dot{\tau}(t) = [-\alpha + \beta A k(t)]\tau(t) \tag{3.37}$$

Die Finanzierung der Humankapital-Produktion (des technischen Fortschritts) erfolgt aus dem Wachstum des Realkapitals. Wenn man also in der Gleichung (3.34)

[80] Diese Bedingung trifft für ökonomisch interpretierbare realitätsnahe Werte von den Parametern g_L, δ und s immer zu.

berücksichtigt, dass die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Realkapitals mit einer zunehmenden Produktion des Humankapitals abnimmt, ergibt sich:

$$\dot{k}(t) = \left[sA - (g_L + \delta) - \gamma\, \tau\,(t)\right] k(t) \tag{3.38}$$

wobei der positive Parameter γ das Verhältnis zwischen dem (gewünschten) Niveau des Humankapitals und seiner Wirkung auf die Dynamik der Realkapitalproduktion ausdrückt. Die Wachstumsrate des Pro-Kopf-Realkapitals sinkt eigentlich in dem Maße, wie die Produktion des Humankapitals finanziert wird.

Die Gleichungen (3.37) und (3.38) bilden ebenfalls ein Differenzialgleichungssystem vom Lotka-Volterra-Typ, wobei aufgrund der identischen formalen Struktur das Pro-Kopf-Realkapital k der Beute- und das Humankapital τ der Räuberpopulation entspricht.

Die aus ökonomischem Gesichtspunkt interessante Gleichgewichtslösung des Systems:

$$\tau^* = \frac{sA - (g_L + \delta)}{\gamma} \tag{3.39}$$

$$k^* = \frac{\alpha}{\beta\, A} \tag{3.40}$$

ist neutral stabil, wenn die Technologie effizient ist.

Mit Ausnahme des Gleichgewichts (k^*, τ^*) (und der ökonomisch wenig interessanten Randlösungen) beschreibt jede Lösung des Systems eine geschlossene Kurve im k-τ Diagramm. Die beiden endogenen Variablen des Systems, das Pro-Kopf-Realkapital und das Humankapital oszillieren periodisch um die Gleichgewichtswerte.

In diesem Modell wurden die beiden Formen des Kapitals – sowohl das Realkapital, als auch das Humankapital – durch Verwendung von Ersparnissen geschaffen. Die

Entwicklung des technischen Fortschritts wird sozusagen aus dem Residualteil des Pro-Kopf-Realkapitals indirekt finanziert.

Im Hintergrund dieses Modells ist in gewisser Weise auch die Konkurrenz, wie das Lotka-Volterra Grundmodell auch den Wettbewerb zwischen den verschiedenen Arten modelliert. Im Endeffekt verschwindet das Humankapital, wenn kein Anwendungsgebiet da ist. Dazu wird das Realkapital benötigt, das Voraussetzungen für die Schaffung des Humankapitals sichert. Im Realkapital-Humankapital-Modell sind, wie im Goodwin-Modell, die kurzfristigen Interessen gegenseitig, die langfristigen komplementär.

4. Geschichtlicher Hintergrund der dynamischen (oder Lotka-Volterra-) Modelle
Lotka und Volterra, sowie 40 Jahre später Goodwin und Samuelson – was war dazwischen?

In diesem Kapitel wird das Ziel verfolgt, die im vorherigen Kapitel vorgestellten Modelle hinsichtlich ihres dogmenhistorischen Hintergrunds, sowie Palombas Modell mit dogmenhistorischen Hintergrund vorzustellen.

4.1 Lotka, Volterra und die Lotka-Volterra-Gleichungen

„I see there only now that one of the problems you have treated coincides with one of those I have developed in my memoir."
(Volterra to Lotka)[81]

Es scheint eine Ironie des Schicksals zu sein, dass die Benennung der vielleicht bekanntesten Gleichungen der Biomathematik, der Lotka-Volterra-Gleichungen, die Namen von zwei so völlig verschiedenen Wissenschaftlern miteinander verbindet. Sie waren außerordentlich weit voneinander, besonders was ihre Hintergründe, Konzeptionen sowie wissenschaftlichen Methoden betrifft.[82] Trotzdem entwickelten die beiden Forscher vollkommen unabhängig voneinander, fast gleichzeitig die die gleiche mathematische Struktur aufweisenden Räuber-Beute-Gleichungen, die später als Lotka-Voltera-Gleichungen bekannt wurden.

Die Periode zwischen 1920-1940 wird mit Recht als das Goldene Zeitalter der theoretischen Biologie bezeichnet[83], denn in dieser Periode war – neben dem erfolgreichen Wirken der beiden genannten Forscher Volterra und Lotka – auch eine außergewöhnlich schnelle Entwicklung auf Gebieten wie der Populationsgenetik oder der mathematischen Theorie der Epidemien erfolgt. Die Mathematik ist zu dieser Zeit nicht mehr nur das Hilfsmittel mit begrenzter Funktionalität, das bei der Analyse

[81] Israel/Gasca (2002), S. 283.
[82] Vgl. Israel (1999), S. 145.
[83] Vgl. Israel (1999), S. 146 und Scudo/Ziegler (1978): *The Golden Age of Theoretical Ecology: 1923-1940*.

biologischer Phänomene assistiert, sondern wird mit nötigen Konzeptionen, ihren Methoden und der eigenen Sprache selbst Teil der Analyse.[84]

Vito Volterra (1860-1940), der bedeutende italienische Mathematiker war in den zwanziger Jahren ein anerkannter Professor der mathematischen Physik in Rom. Er bekundete besonderes Interesse für die irreversiblen Prozesse sowie für Probleme der Elastizität. Schon seit 1901 beschäftigte ihn die Frage, wie die Mathematik auf die Biologie und Sozialwissenschaften angewandt werden könnte. Außerdem untersuchte er auch die quantitativen Zusammenhänge innerhalb der Biologie, bis er 1925 infolge eines ungewöhnlichen Phänomens seine Aufmerksamkeit auf die mathematische Ökologie richtete, die dann bis zum Ende seines Lebens im Mittelpunkt seines Interesses blieb.[85]

Er versuchte zu erklären, warum der Anteil bestimmter Raubfische in der Adria während des ersten Weltkrieges deutlich höher war als in den Jahren vorher und nachher, und warum anderseits der Anteil der Beutefische niedriger war. Der Krieg hatte den Fischfang unterbrochen, aber warum hatte das auf die Raubfische eine günstigere Wirkung als auf die Beutefische? Auf diese Tatsache machte ihn der italienische Biologe, sein zukünftiger Schwiegersohn, Umberto D'Ancona aufmerksam. D'Ancona analysierte die Daten über den prozentualen Anteil mehrerer Fischarten am Gesamtfang, der in verschiedenen Häfen der Mittelmehrküste zwischen 1905 und 1923 eingebracht wurde. D'Ancona spielte alle möglichen biologischen Erklärungen des Phänomens durch und war der Meinung, dass der unterbrochene Fischfang das biologische Gleichgewicht der Adria zugunsten der Raubfische veränderte.[86]

Volterra wollte eine theoretische Erklärung für die Frage geben und versuchte ein mathematisches Modell aufzustellen. Er beschrieb vorerst die Wechselwirkung zwischen Raub- und Beutefischen, wenn nicht gefischt wird, und kam auf die im Punkt 2.1 vorgestellten Gleichungen (2.1)-(2.2). Die Untersuchung beendete er mit seinen drei Gesetzen:[87]

[84] Vgl. Israel (1999), S. 145f.
[85] Vgl. Kingsland (1995), S. 106f.
[86] Vgl. Bacaër (2011), S. 74f.
[87] Vgl. auch Schaefer (2012), S. 312.

(I) Die Bevölkerungsschwankungen von Räuber und Beute sind periodisch und phasenverzögert, wobei die Maxima der Räuberpopulation den Maxima der Beutepopulation folgen.

(II) Die Mittelwerte der Individuenzahlen beider Arten für eine ganze Periode sind konstant und sind von den Anfangsbedingungen unabhängig.

(III) Wird die Anzahl der Individuen der beiden Arten gleichmäßig und proportional zu ihren Gesamtzahlen verringert (z. B. durch Fischfang), dann wird der Mittelwert der Individuenzahlen der Beute vergrößert, der der Räuberpopulation vermindert.

Daraus erklärt sich die Tatsache, dass ein verminderter Fischfang die Räuber mehr als die Beute begünstigt. Das dritte Gesetz schien also mit D'Anconas Beobachtungen im vollen Einklang zu stehen.[88]

Diese Übereinstimmung war für Volterra das Wesentliche an der Studie, der Punkt, an dem die theoretische Forschung beobachtbare Tatsachen der Biologie untermauerte. Darauf sollte sich das sorgfältige Denken konzentrieren, um einen nächsten Schritt der Forschung zu setzen, und zugleich die Nützlichkeit der theoretischen Forschung zu zeigen.[89]

Volterra wandte, genauso wie auch einige andere Naturforscher seiner Epoche, das mathematische Modell an, um eine Lösung für ein konkretes praktisches Problem finden zu können, so gelangte er durch das konkrete Problem zur mathematischen Formulierung allgemeiner Fragen. Er ging an die Fragen reduktiv und mechanistisch heran, wobei die untersuchten Fragen auf die einfachste, aber mathematisch handhabbare Form reduziert werden müssen. Im Hintergrund seiner Gedanken stand seine Ansicht, dass das Ganze als Gesamtheit der Teile zu betrachten ist. Diesem Prinzip folgend wollte er seine umfassende Theorie aufbauen, die – wie er hoffte – schließlich zum Verstehen des dynamischen Verhaltens der ganzen ökologischen Gemeinschaft führen würde. [90]

[88] Israel/Gasca (2002), S. 5f.
[89] Israel/Gasca (2002), S. 6.
[90] Vgl. Israel (1999), S. 148f.

Die ersten Ergebnisse seiner Forschung zur Wechselwirkung der Spezies in einem Ökosystem veröffentlichte Volterra 1926 in der Abhandlung *Schwankungen und Fluktuationen der Anzahl der Individuen in tierischen Lebensgemeinschaften*[91] auf Italienisch[92]. Noch im selben Jahr publizierte er eine kurze Zusammenfassung in der Zeitschrift *Nature* auf Englisch[93], um seine Ergebnisse auch international bekannt zu machen.[94]

Dieser Artikel gelangte in die Hände vom amerikanischen Biophysiker und Mathematiker *Alfred J. Lotka* (1880-1949), der Priorität in der Formulierung des Räuber-Beute-Interaktion beschreibenden Differenzialgleichungssystems auf Grund der in seinem 1925 erschienenen Buch *Elements of Physical Biology*[95] bereits veröffentlichten Ergebnisse forderte. Lotkas erwähnte Arbeit war Volterra nach seinen Aussagen zu jener Zeit noch nicht bekannt.[96]

Am Anfang der zwanziger Jahre war Lotka Mitarbeiter an der Johns Hopkins University, von 1924 war er als Leiter der Statistischen Abteilung für die Lebensversicherungsanstalt Metropolitan Life Insurance Company in New York tätig, wo er unter anderem an demographischen Studien arbeitete.[97] Im Mittelpunkt seines früheren Interesses stand die physische Chemie, insbesondere die oszillierenden chemischen Reaktionen, außerdem beschäftigte er sich mit dem thermodynamischen Aspekt der Evolutionstheorie sowie auch mit der mathematischen Analyse der Malaria.[98]

Lotka konzentrierte sich auf allgemeine theoretische Fragen, seine Herangehensweise unterschied sich völlig von der Volterras. Er meinte, nur wenn die Natur als Ganzes betrachtet wird, kann das Verhalten ihrer vielen Elemente verstanden werden.[99]

---

[91] Vgl. Guerraggio/Paoloni (2011), S. 223.
[92] Originaltitel: *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*.
[93] Volterra (1926): Fluctuation in the Abundance of Species Considered Mathematically.
[94] Vgl. Kingsland (1995), S. 107f.
[95] Lotka (1925).
[96] Vgl. Israel (1988), S. 38f.
[97] Vgl. Véron (2008) S. 2 und Israel/Gasca (2002), S. 279.
[98] Vgl. Scudo/Ziegler (1978), S. 2.
[99] „Nature must be considered as a whole if she is to be understood in detail."(Bunge), vgl. Lotka (1956), S. 20.

Lotkas analytische Methode begann mit der Beschreibung der Interaktion von Spezies durch eine Reihe simultaner Differenzialgleichungen. Seine Technik beruhte auf Methoden, die für die mathematische Beschreibung der Dynamik chemischer Reaktionen verwendet wurden. Das Verfahren war eine frühe Version dessen, was später als allgemeine Systemtheorie[100] bezeichnet wurde. [101]

Die Methode selbst folgte aus Lotkas „Grundgleichung der Kinetik“[102], bei der die Veränderung an einem gegebenen Bestandteil des Systems (X_i) die Funktion von allen anderen Bestandteilen (von X_1 bis X_n), von Umweltparametern (P) und von genetischen Parametern (Q) ist:

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(X_1, X_2, ..., X_n; P, Q) \tag{4.1}$$

Die Elemente X_i, $i=1, ..., n$, geben z. B. Bestände der Spezies in einem Ökosystem an. Um das Problem zu vereinfachen, nahm Lotka an, dass sowohl die Umwelt als auch die genetische Zusammensetzung der Spezies konstant waren, so konnten sie bei Betrachtung der zeitlichen Veränderungen vernachlässigt werden. Die Grundgleichung wurde dann auf jedes Element X_i getrennt angewandt, wobei die (unbekannte) Funktion F mit einer Taylorschen Reihe approximiert wurde.[103]

Dies ergab eine bestimmte Zahl von Differenzialgleichungen, die die mengenmäßige Veränderung jeder einzelnen Komponente X_i mit jeder anderen Komponente im System verband. Der nächste Schritt war nun, diese Gleichungen zu lösen und die Lösung zu untersuchen.[104]

Lotkas Formulierung der Lotka-Volterra-Gleichungen setzt nicht unbedingt voraus, dass die Gleichungen das betrachtete System komplett beschreiben, ja stellt teilweise sogar

[100] Das Ziel war es, zur systemtheoretischen Analyse eine mathematische Methode zu entwickeln, mit der die Wechselwirkung zwischen den Elementen irgendeines Systems modelliert werden kann. Das Wort „*System*“ wurde deshalb sehr allgemein interpretiert, und zwar so, dass die Systemanalyse als mathematische Technik auf die verschiedensten Fachgebiete, wie Biologie, Informationstheorie, Ökonomie, oder Soziologie angewandt werden konnte. (Vgl. Kingsland (1995), S. 103.)
[101] Vgl. Kingsland (1995), S. 103.
[102] „fundamental equation of kinetics”.
[103] Vgl. Kingsland (1995), S. 104.
[104] Vgl. Lotka (1956), S. 57-63. und Kingsland (1995), S. 104.

die Notwendigkeit dessen in Frage.[105] Stattdessen wird angenommen, dass die Gleichungen in einer lokalen Umgebung eines Gleichgewichtspunkts durch den ersten Term der Taylorschen Reihenentwicklung gut approximiert werden können. Sei die Pro-Kopf-Wachstumsrate der Spezies *i*, bezeichnet mit N_i, durch die nicht näher spezifizierte Funktion G_i angegeben:

$$\frac{1}{N_i}\frac{dN_i}{dt} = G_i\left(N_1, N_2, ..., N_n\right) \tag{4.2}$$

Die rechte Seite wird um den nichttrivialen – positiven – Gleichgewichtspunkt (N_i^*) in eine Taylor-Reihe entwickelt. Wenn die Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden, ergibt sich also die folgende linearisierte Gleichung:

$$G_i\left(N_1, N_2, ..., N_n\right) = G_i\left(N_1^*, N_2^*, ..., N_n^*\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial N_j}\bigg|_{N_j = N_j^*} \left(N_j - N_j^*\right) \tag{4.3}$$

Wird

$$b_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial N_j}\bigg|_{N_j = N_j^*} N_j^* \qquad \text{und} \tag{4.4}$$

$$a_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial N_j}\bigg|_{N_j = N_j^*} \tag{4.5}$$

gesetzt, und beachtet, dass $G_i(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ in einem nichttrivialen Gleichgewichtspunkt gleich Null sein muss, ist ersichtlich, dass die Dynamik des Modells um den Gleichgewichtspunkt durch die bekannten verallgemeinerten Lotka-Volterra-Gleichungen approximiert werden kann:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} N_j\right) \tag{4.6}$$ [106]

[105] Vgl. dazu und zum Folgenden Haydon/Lloyd (1999), S. 205f.

[106] Die Gleichungen unter (4.6) beschreiben das verallgemeinerte Lotka-Voterra-Modell für *n* Spezies, wobei b_i angibt, wie die *i*-te Spezies in Abwesenheit aller anderen wächst (oder fällt) und a_{ij} beschreibt die Wirkung der *j*-ten auf die *i*-te Spezies. Ist dabei $a_{ij} > 0$, so nimmt die Population der Spezies *i* bei einer „Kollision" mit Spezies *j* zu, ist $a_{ij} < 0$, so nimmt die Population bei einer solchen Begegnung ab. Ist $a_{ij} = 0$, so findet keine Interaktion statt.

Die Koeffizienten a_{ij} und b_i, $i, j = 1,...,n$, werden gemäß der in (4.4)-(4.5) dargestellten Ableitungen berechnet, in dem man die Letzteren im Gleichgewicht bestimmt, die damit in Bezug auf die gleichgewichtigen Populationsgrößen angegeben werden.[107]

Obwohl die von Lotka und von Volterra entwickelten Gleichungen eine identische mathematische Struktur aufweisen, war Volterras Formulierung direkter; er nahm an, dass die Gleichungen (4.6) bzw. (2.1)-(2.2) völlig spezifizierte Gleichungen sind, die die globale Dynamik des Systems beschreiben. Dementsprechend können die in den Gleichungen erscheinenden Koeffizienten ökologisch eindeutig interpretiert werden.[108]

Lotka neigte eher dazu, die Wirt-Parasiten- und die Räuber-Beute-Beziehungen zusammen zu behandeln, wobei er seine dargelegte Methode verwendete und damit die Wechselwirkung zwischen den zwei Arten viel allgemeiner beschrieb als seine Vorgänger. Er zeigte zum Beispiel, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Spezies unter bestimmten Umständen periodische Schwingungen erzeugt. Mittels einer genaueren Analyse kann gezeigt werden, dass auch gedämpfte Schwingungen entstehen können, wo sich die Schwankungen allmählich vermindern und sich einem stationären Niveau annähern.[109]

Die Untersuchung der numerischen Relation zwischen zwei in einer Räuber-Beute-Beziehung stehenden Arten war der Punkt, wo sich Lotkas und Volterras Arbeiten tatsächlich überschnitten, wo die beiden Forscher also völlig identische Gleichungen formulierten und bezüglich der periodischen Oszillation der Räuber- und Beutepopulation auch zu gleichen Schlussfolgerungen gelangten. Volterras Untersuchung war jedoch ausführlicher.

Vom Gesichtspunkt des Prioritätenstreits aus betrachtet sei erwähnt, dass die ’Lotka-Volterra’-Gleichungen bereits 1920 in zwei Artikeln über oszillierende chemische Reaktionen[110] von Lotka formuliert wurden, wobei die ursprüngliche Inspiration auf

[107] Vgl. Haydon/Lloyd (1999), S. 205.
[108] Vgl. Haydon/Lloyd (1999), S. 206.
[109] Vgl. Kingsland (1995), S. 104.
[110] Lotka (1920a) und Lotka (1920b).

einen noch früheren Artikel aus dem Jahre 1910[111] zurückging.[112] Merkwürdigerweise bezieht sich Lotka aber nicht auf diese Artikel, sondern auf sein 1925 erschienenes Buch, wenn er Priorität fordert.[113]

Der Grund mag darin liegen, dass mit Lotkas Artikeln aus dem Jahre 1920 die Priorität nur am mathematischen Modellieren oder an der systemtheoretischen Vorstellung aber nicht an der populationsdynamischen Untersuchung bewiesen werden konnte.[114]

Volterra muss mit seiner Meinung recht gehabt haben, dass Lotka die populationsdynamischen Gleichungen aufgrund der Analogie zwischen den chemischen und biologischen Systemen formulierte. Lotka bezieht sich jedoch auf die empirische Analyse eines Wirt-Parasiten-Ökosystems als Ausgangspunkt zur Entwicklung seiner 'Lotka-Volterra'-Gleichungen und erwähnt die Analogie mit dem chemischen Modell gar nicht.[115]

Volterra erkannte Lotkas Priorität bei der Formulierung der Gleichungen für den zweidimensionalen Fall an, wies aber auf die wesentlichen Unterschiede in ihrer Anschauungsweise hin, auf denen ihre Arbeiten basierten. Wie Volterra behauptete, wären seine Ergebnisse allgemeiner und weitreichender.[116]

Volterra setzte seine Arbeit fort, 1927 wurde sein im Jahre 1926 publizierte Abhandlung durch eine ausführliche Studie erweitert und unter dem gleichen Titel[117] (auf Italienisch) veröffentlicht.[118] In diesem Werk sind ein paar neue und interessante Modellergänzungen bzw. -erweiterungen zu finden, die in der alten Fassung noch nicht vorhanden waren (z. B. die Erweiterung des Modells auf *n* Spezies, wobei die Wachstumsraten von der Anzahl der Individuen einer Population abhängen, oder die

[111] Lotka (1910).
[112] Auch in der zeitgenössischen mathematischen Literatur ist die erste Formulierung der Lokta-Volterra-Gleichungen mit den genannten Arbeiten verbunden.
[113] Vgl. Israel (1988), S. 39.
[114] Vgl. Israel (1988), S. 40f.
[115] Vgl. Israel (1988), S. 41.
[116] Vgl. Israel (1988), S. 39.
[117] Volterra (1927a): Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Auf Englisch Volterra (1927b).
[118] Vgl. Kingsland (1995), S. 112 und Scudo/Ziegler (1978), S. III.

Berücksichtigung der Interaktion zwischen den Populationen mit zeitlicher Verzögerung).[119]

Im Jahre 1931 erschien Volterras Buch *Leçon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*,[120] auf das in der Literatur oft als Quelle von Volterras Räuber-Beute-Modell zurückgegriffen wird. Volterra stellte das Buch aufgrund seiner am neuen Henri Poincaré Institut in Paris im Winter 1928/29 gehaltenen Vorlesungen zusammen. Hier arbeitete Volterra einige seiner früher schon publizierten Ideen unter Berücksichtigung weiterer Aspekte und Verfeinerungen weiter aus, um den Mangel an Realitätsnähe der früheren Modelle abzustellen.[121]

Er unterschied bereits früh zwischen zwei Typen von Strukturen biologischer Systeme voneinander: er sprach von den *konservativen* und den *dissipativen* Systemen. Konservative Systeme sah er als analog zu den reibungsfreien Systemen in der Mechanik an: In einem biologisch konservativen System blieben die durch die Wechselwirkung der Arten entstandenen Schwingungen konstant, keine der Arten stirbt aus oder wächst in endlicher Zeit auf einen unendlichen Wert. Ein Beispiel dafür ist die schon erwähnte Räuber-Beute-Oszillation.[122]

Volterra aber meinte, dass die vollkommen konservativen Systeme Idealfälle wären, die die Prozesse in der Realität nur annähernd widerspiegeln. Es wäre viel wahrscheinlicher, dass Ökosysteme dissipativ wären, das heißt, dass die Schwingungen der Spezies gedämpft sind und das Ökosystem somit zu einem Gleichgewichtszustand tendiert, analog zur Wirkung der inneren Reibung in mechanischen Systemen. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Systemen läge seiner Meinung nach darin, dass bei dissipativen Systemen der Einfluss der Populationsgröße auf das eigene Wachstum berücksichtigt wird (z. B. logistisches Wachstum statt exponentiellen). Dieser Einfluss würde die Schwingungen zwischen den verschiedenen Arten dämpfen. Durch die Unterscheidung zwischen den beiden Systemen konnte daher eine realitätsnähere

[119] Vgl. Scudo/Ziegler (1978), S. 58.
[120] Volterra (1931).
[121] Vgl. Kingsland (1995), S. 112.
[122] Vgl. Kingsland (1995), S. 112.

Erweiterung des idealisierten Systems von dauernden Schwingungen verwirklicht werden.[123]

Wie auch das Obige zeigt, legte Volterra seinen mathematisch ökologischen Theorien oft mechanische Analogien zugrunde.

Die Entdeckungsumstände der Lotka-Volterra-Gleichungen sowie der Prioritätenstreit um diese weisen darauf hin, dass beide Wissenschaftler, obwohl auf verschiedene und manchmal sogar auf gegensätzliche Weise, eine herausragende Rolle in der Schaffung der mathematischen Ökologie spielten. Ihre Ergebnisse, vor allem die fast gleichzeitig entwickelten und nach ihnen benannten Gleichungen bzw. Modelle (oder ganz ähnliche) werden in vielen anderen wissenschaftlichen Disziplinen[124], nicht nur in ihren eigenen eingesetzt. In den Sozialwissenschaften, genauer gesagt im Bereich der Wirtschaftswissenschaften, sollte allerdings noch einige Zeit vergehen, bis man auch hier auf diese Strukturen aufmerksam wurde, denn die Anwendung auf ökonomische Fragestellungen erfolgte nach unserem heutigen Wissen erstmals im Jahre 1939, und zwar durch Giuseppe Palomba und dann, etwa 30 Jahre später, durch Richard M. Goodwin und Paul A. Samuelson.

4.2 Palombas Modell – Ist es nur vom dogmenhistorischen Gesichtspunkt aus wichtig?

Wie schon erwähnt, waren der Artikel von Goodwin aus dem Jahre 1967 und der von Samuelson aus dem gleichen Jahr für lange Zeit als erste Anwendungen des Lotka-Volterra-Modells auf ökonomische Fragen bekannt.[125]

1988 wurde jedoch von Massimo DiMatteo[126] darauf hingewiesen und dann 2008 in einem Artikel von Giancarlo Gandolfo[127] detailliert vorgestellt, dass der italienische

[123] Vgl. Kingsland (1995), S. 112f.
[124] wie auch in der Einleitung erwähnt.
[125] In seinem Beitrag zu den Räuber-Beute-Modellen (Predator–Prey Models) in *The New Palgrave Dictionary of Economics* schreibt z. B. Goodwin selbst: „In spite of a potential relevance, these developments appear to have had no effect on economic theory until the appearance of a paper by Goodwin in 1965, and independently, two by Samuelson, in 1967 and again in 1971." vgl. Goodwin (2018), S. 10599. Vgl. auch Goodwin/Krüger/Vercelli (1984), S. IX.

Wirtschaftswissenschaftler Giuseppe Palomba (1908-1986) die Lotka-Volterra Gleichungen in seinem im Jahre 1939 veröffentlichten Buch *Introduzione allo studio della dinamica economica*[128] (Einführung in die Untersuchung der ökonomischen Dynamik) schon wesentlich früher verwendet hatte als Goodwin und Samuelson.

Palombas Modell, das hier kurz vorgestellt wird, ist auch außerhalb seines dogmenhistorischen Hintergrunds bemerkenswert. Seine Konklusionen und Vorschläge bezüglich der künftigen Forschung waren für seine Zeit überraschend modern.

4.2.1 Darstellung des Modells [129]

Palomba betrachtet eine Zwei-Sektoren-Wirtschaft, wo es nur zwei Arten von Gütern gibt, Konsumgüter und Investitionsgüter. Seine Annahmen sind die folgenden:

1) Es gibt zwei Arten von Gütern:
Güter des Typs a), die aus für den direkten Verbrauch geeigneten Gütern sowie aus Gütern bestehen, die unmittelbar in ihre Produktion eintreten;
Güter des Typs b), nämlich Investitionsgüter, die direkt in die Produktion von anderen Investitionsgütern und nur indirekt in die Produktion von Endprodukten eintreten.

2) Die Wirtschaft befindet sich in einer dynamischen Phase, die dazu neigt, die Kapitalausstattung zu vergrößern. Folglich kann ein Teil der Güter des Typs a) von ihrer ursprünglichen Verwendung abweichend in die Kategorie b) alloziert werden.

3) In jedem gegebenen Moment haben die Güter des Typs a) eine Wachstumsrate ε_1 (dies kann von langfristigen Einflüssen wie Produktivität oder Arbeitskräftewachstum abhängen, Palomba spezifiziert diese jedoch nicht). Die Güter des Typs b) haben dagegen eine negative Wachstumsrate $-\varepsilon_2$. (ε_1 und ε_2 sind positive Konstanten). Dies bedeutet, dass die Güter des Typs a) ohne die oben beschriebene Änderung der

[126] Vgl. DiMatteo (1988), S. 96-97.
[127] Gandolfo (2008).
[128] Palomba (1939).
[129] Vgl. Palomba (1939), S. 92-100 und Gandolfo (2008), S. 349-350.

Verwendung stetig (und exponential) zunehmen würden, während die Güter des Typs b), infolge des Verschleißes bis Null abnehmen würden.

4) Wegen der erwähnten Änderung der Verwendung nehmen die Güter des Typs a) mit einer Rate von γ_1 ab, und gleichzeitig, aus demselben Grund, wachsen die Güter des Typs b) mit einer Rate von γ_2, wo γ_1 und γ_2 positive Konstanten sind.

Wenn C_1 und C_2 das Volumen der Güter des Typs a) und b) bezeichnen, erhalten wir die Differenzialgleichungen:

$$\frac{dC_1}{dt} = C_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) \tag{4.7}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -C_2(\varepsilon_2 + \gamma_2 C_1) \tag{4.8}$$

4.2.2 Der Lotka-Volterra-Hintergrund

Palomba hatte Kenntnis von der Arbeit von Lotka und Volterra: Die zwei Arten von Wirtschaftsgütern können, was ihre Wechselwirkung betrifft, mit zwei koexistierenden Tierpopulationen verglichen werden.[130]

Das mathematische und grafische Verfahren, das Palomba verwandte, um das System zu lösen, ist dasselbe, das von Volterra vorgelegt worden war, und die Symbole, die Palomba für die Parameter verwandte (ε_1 usw.) sind die gleichen, wie bei Volterra.

4.2.3 Palombas Beobachtungen und Schlussfolgerungen

Darüber hinaus sind noch zwei wichtige Beobachtungen von Palomba erwähnenswert.

Erstens betont er, dass das wellenförmige Verhalten der Wirtschaft nur von der Wechselwirkung der involvierten Variablen abhängt, so dass es der Natur des

[130] Vgl. Palomba (1939), S. 98-99.

Wirtschaftssystems inhärent ist. Dies bedeutet, dass Zyklen in diesem Modelltyp endogen und infolge der Nichtlinearität des Systems selbsterhaltend sind.[131]

Das ist eine überraschend moderne Behauptung, besonders in einer Periode, in der die Konjunkturmodelle, die von Wirtschaftswissenschaftlern mit fundiertem mathematischem Wissen, wie Frisch, Tinbergen, Samuelson usw. entwickelt wurden, linear waren. Exogene Faktoren (wie zufällige Schocks) mussten in den meisten Fällen herangezogen werden, um den Zyklus aufrecht zu erhalten.[132]

Erst in den 1950er Jahren begann Goodwin, nichtlineare mathematische Modelle des Zyklus sorgfältig auszuarbeiten[133], wobei seine Bemühungen im berühmten Growth Cycle (Wachstumszyklus) kulminierten.[134]

Zweitens weist Palomba darauf hin, dass die Parameter ε_1, ε_2, γ_1 und γ_2 verallgemeinert, als stetige Funktionen der Zeit betrachtet werden sollten. Mathematisch kann Palombas Intuition durch das folgende System ausgedrückt werden:

$$\frac{dC_1}{dt} = C_1\left[\varepsilon_1(t) - \gamma_1(t)C_2\right] \tag{4.9}$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -C_2\left[\varepsilon_2(t) + \gamma_2(t)C_1\right] \tag{4.10}$$

Dieses stellt, anders als die ursprünglichen Lotka-Volterra Gleichungen, ein nichtautonomes Differenzialgleichungssystem dar. Die Volterra-Systeme mit sich zeitlich verändernden Koeffizienten sind mathematisch nicht gelöst. Zu Palombas Zeit waren diese Gleichungen noch weniger handhabbar, deshalb musste sich Palomba auf intuitive grafische Überlegungen verlassen, auf deren Grundlage er beschloss, dass die geschlossenen Kurven, die das Ergebnis des ursprünglichen Lotka-Volterra Systems darstellen, durch Spiralen zu ersetzen sind, die gedämpft oder verstärkt werden können.

[131] Vgl. Palomba (1939), S. 98.
[132] Vgl. Gandolfo (2008), S. 351.
[133] Goodwin (1951).
[134] Vgl. Gandolfo (2008), S. 352.

(Etwa dreißig Jahre später kam Samuelson zu ähnlichen Ergebnissen.[135]) Das ist natürlich nicht das einzig mögliche Ergebnis, da alles von den Eigenschaften der Funktionen $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ abhängt.[136]

Zusammenfassend lässt sich zu Palombas Beitrag Folgendes sagen:
1) Er war nach unserem heutigen Wissen der Erste, der die Lotka-Volterra Gleichungen in der Ökonomik verwandte;
2) er war unter den Ersten, der verstanden hat, dass der Konjunkturzyklus ein endogenes Phänomen des Wirtschaftssystems ist und dafür ein nichtlineares mathematisches Modell aufstellte;
3) er war nach unserem heutigen Wissen der Erste, der vorgeschlagen hat, dass zyklische Phänomene verallgemeinert analysiert werden sollten, wobei die Koeffizienten in den Lotka-Volterra-Gleichungen als Funktionen der Zeit und nicht als Konstanten erscheinen.[137]

Punkte 1) und 2) sind vor allem unter dogmenhistorischem Gesichtspunkt wichtig, Punkt 3) dagegen ist auch heute noch aktuell, da Palombas Idee von Wirtschaftswissenschaftlern noch nicht aufgegriffen worden ist. Sie könnte als Ausgangspunkt dienen, um neue und realistischere Modelle zu entwickeln.[138]

4.3 Zur Entstehung des Goodwin-Modells

„... in the essay 'A Growth Cycle', where I tried to arrange an indissoluble union of growth and cy1e..."
(Goodwin)[139]

Richard M. Goodwin stellte sein Konjunkturmodell „A Growth Cycle" im Jahre 1965 auf dem ersten Weltkongress der Econometric Society in Rom vor. Publiziert wurde dieses Modell dann zwei Jahre später, im Jahre 1967, in einer Festschrift für den englischen marxistischen Ökonomen Maurice Dobb.[140] 1972 veröffentlichte Goodwin selbst eine revidierte und erweiterte Fassung seines Aufsatzes, in der er am Modell

[135] Samuelson (1967).
[136] Vgl. Gandolfo (2008), S. 352.
[137] Vgl. Gandolfo (2008), S. 352.
[138] Vgl. Gandolfo (2008), S. 352f.
[139] Goodwin (1982), S. viii.
[140] Vgl. Schmidt (1998), S. 7 und Vosgerau (1982), S. 3.

(Annahmen, Gleichungen, Lösung, Interpretation) selbst nichts ändert, sondern an mehreren Stellen nur ergänzende Erklärungen hinzufügt.[141]

Die Erfahrungen der Nachkriegsjahre, das ständige Wachsen des realen Volkseinkommens in fast allen entwickelten kapitalistischen Gesellschaften ließen die Ansicht aufkommen, dass die kapitalistische Wirtschaft keine ernsten Konjunkturzyklen oder Wachstumszyklen mehr aufweisen würde. Der Titel eines Buches: Ist der Konjunkturzyklus obsolet? (herausgegeben von M. Bronfenbrenner gegen Ende der sechziger Jahre) illustriert offensichtlich die allgemeine Einstellung in dieser Zeit.[142]

Goodwin richtete bereits in den fünfziger Jahren seine Aufmerksamkeit auf die Untersuchung der Konjunkturzyklen[143] und hielt seine Ansicht über die zentrale Rolle der Konjunkturzyklen auch in den sechziger Jahren aufrecht, als das Wachstum, im Gegensatz zu den für veraltet gehaltenen Zyklen immer stärker in Mittelpunkt des Interesses der Wirtschaftswissenschaftler geriet.[144] Obwohl er selber auch an wachstumstheoretischen Diskussionen teilnahm, betonte immer wieder, dass das Wachstum und die Zyklen zusammen behandelt werden sollten.[145]

Seine Beschäftigung mit dynamischen und speziell konjunkturtheoretischen Fragen begann jedoch schon viel früher, in der Mitte der dreißiger Jahre. Die Anregung kam während seiner Studienjahre in Oxford von einem seiner dortigen Professoren, von ***Roy Harrod***. Zu dieser Zeit verfasste Harrod ein kleines Buch über Konjunkturzyklen[146], in dem er versuchte, Keynes' *General Theory* zu erweitern und die zyklische Schwankung mit dem Zusammenwirken von Multiplikator und Akzelerator zum Ausdruck bringen wollte.[147] [148] Damit konnte er zeigen, dass der Wachstumspfad des Kapitalismus

[141] Goodwin (1972).
[142] Goodwin/Krüger/Vercelli (1984), S. VII.
[143] Z. B.: Goodwin (1953): The Problem of Trend and Cycle oder Goodwin (1955): A Model of Cyclical Growth.
[144] Vgl. Vercelli (1988), S. 103.
[145] „It had long been clear to me that most of the inadequacies of cycle models stemmed from the failure to incorporate growth." Goodwin (1982), S. viii.
[146] Harrod (1936): The Trade Cycle.
[147] Vgl. Goodwin (1982), S. vii.
[148] Auch dies ist ein interessantes zeitliches Zusammentreffen, denn zur selben Zeit publizierte Samuelson seinen berühmten Artikel, der ebenfalls auf der Verbindung von Multiplikator und Akzelerator basierte. (Samuelson, P.A. (1939): Interaction Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration.)

eigentlich instabil ist; das Erreichen des idealen Zustands der Vollbeschäftigung bedeutet – mit heutigem Wortgebrauch – eine Bifurkation.

Goodwin machte Harrod auf eine, in einer deutschen Zeitschrift veröffentlichte Rezension von J. Tinbergen über sein Buch aufmerksam, in der Tinbergen darauf hinwies, dass der Akzelerator-Multiplikator-Effekt eine Differenzialgleichung erster Ordnung impliziert und folglich nur exponentielles Wachstum, jedoch keine Zyklen hervorrufen konnte. Trotz der methodisch begründeten Kritik fand Goodwin nach wie vor, dass nicht Tinbergens, sondern Harrods Ansicht über die Dynamik des Kapitalismus zutreffender war, Letzterer aber nicht über das zur Formulierung und Lösung des Problems nötige Instrumentarium verfügte.[149]

Die Frage der Dynamik, der zyklischen Bewegungen, blieb also für einen langen Zeitraum im Mittelpunkt von Goodwins Interesse. Auf eine Art Erleuchtung musste er jedoch warten, bis er während des Krieges an der Harvard University Physik unterrichtete. Dort traf er ***Philippe Le Corbeiller***, den Mathematiker, der sich auf die Theorie der Oszillatoren spezialisiert hatte. Bei ihm lernte Goodwin die Annahmen für die Existenz bestimmter Nichtlinearitäten kennen, die stabile Grenzzyklen ergeben. Diese Nichtlinearitäten erwiesen sich als nützlicher Ausgangspunkt für seine weitere Arbeit.[150]

Danach arbeitete Goodwin mehrere Jahre nahezu ausschließlich daran, die Theorie der Konjunkturzyklen auf eine solche Art und Weise neu zu formulieren, dass sie mit den aus der Geschichte des Kapitalismus wohl bekannten Fakten im Einklang stehe, seiner marxistischen Positionen nahe stehenden Auffassung vom Kapitalismus entspreche und darüber hinaus auch zur strikt analytischen Bearbeitung der Fragestellung geeignet sei. Goodwins Meinung nach mussten dazu mindestens drei Anforderungen erfüllt werden. Einerseits – dies ist dem Einfluss Schumpeters zuzuschreiben – musste Wachstum hauptsächlich durch Innovationen und nicht durch den üblichen Investitionsansatz, also die Erhöhung von Realkapital, erklärt werden. Anderseits musste der Akzelerator, der elementare Bedeutung in der Konjunkturtheorie hat, in einer flexibleren Form

[149] Vgl. Goodwin (1982), S. viif.
[150] Vgl. Goodwin (1982), S. viii.

konzipiert werden[151]. Schließlich mussten diese so kombiniert werden, dass sie ein System beschreiben, das sich entlang eines gleichgewichtigen Pfades bewegt (das dynamische Äquivalent eines stabilen Gleichgewichtspunkts).[152]

Im Aufsatz „A Growth Cycle“ kann gewissermaßen der Höhepunkt einer ungefähr dreißigjährigen mehr oder weniger intensiven Beschäftigung mit dem Harrod-Problem gefunden werden, als Goodwin versuchte, Wachstum und Zyklus unauflöslich miteinander zu vereinigen. Es war ihm schon lange klar, dass die größte Unvollkommenheit der Zyklus-Modelle aus dem sich als falsch erweisenden Bestreben stammte, Wachstum ins Modell nicht zu integrieren: Jeder Wirtschaftswissenschaftler weiß zwar, dass Wachstum stoßweise erfolgt, doch wird diese Tatsache oftmals ignoriert.[153] Nach einer längeren Periode, die von Irrtümern und unbefriedigenden Formalisierungsversuchen geprägt war, sah er sich schließlich mit der Adaptation einer Arbeit von ***Volterra*** in die Lage versetzt, ein Modell zu konstruieren, in dem die Erscheinungen Wachstum oder Zyklus niemals ohne die andere existieren, denn in dem die Interaktionen von Fischpopulation der Adria untersuchenden nichtlinearen dynamischen Modell von Volterra[154] fand Goodwin den Formalismus, den er brauchte.[155]

Obwohl es in Volterras Theorie kein Wachstum, sondern nur einen Zyklus gab, war es möglich, sie zu dem weiterzuentwickeln, was Goodwin suchte: zum zyklischen Wachstum. [156]

Goodwin beendet seinen Artikel mit einem Literaturverzeichnis, in dem nur ein einziges Werk angegeben ist: Volterras *Leçon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*.[157]

---

[151] Vom Gedanken beeindruckt, wie Norbert Wiener das technische Konzept der negativen Rückkopplungskontrolle verallgemeinerte, integrierte Goodwin dies in den Akzelerator. Vgl. Goodwin (1982), S. viii.

[152] Vgl. Goodwin (1982), S. viii.

[153] Vgl. Goodwin (1982), S. viii.

[154] Laut Literaturhinweisen machte der Genetiker J. B. S. Haldane den nach Lösungen suchenden Goodwin auf das Lotka-Volterra-System aufmerksam. Vgl. Harvie (2000), S. 351.

[155] Vgl. Goodwin (1982), S. viiif.

[156] Da in Goodwins Modell beide Variablen (v, u) Quotienten sind, in deren Nenner exogen, mit konstanter Rate wachsende Größe stehen, (das Beschäftigungspotential in $v = \hat{L} / L$ und die Arbeitsproduktivität in $u=w/A$), ist es ersichtlich, dass die Schwingungen von Beschäftigung, Reallohnsatz um einen Wachstumstrend erfolgen. Vgl. Vosgerau (1982), S. 10.

Goodwin legte seine Gedanken in einem Sinne dar, der stark an ***Marx*** erinnerte. Sein Modell „A Growth Cycle" wurde neben dem oben Erwähnten durch eine Marxsche Idee[158] inspiriert, er selbst betrachtete sein Modell als eine vereinfachte, mathematische Formulierung des Marxschen „Gesetz(es) der kapitalistischen Akkumulation", wie es in Band 1 des Werkes „Das Kapital" dargelegt wurde. Goodwins Modell macht den von Marx gezeigten Widerspruch kapitalistischer Wirtschaftssysteme, wonach hohe Gewinne zu von den Kapitalisten veranlasster forcierter Akkumulation führen, anschaulich. Dadurch wird die industrielle Reservearmee (das Heer der Arbeitslosen) abgebaut und die Verhandlungsmacht der Arbeiter gestärkt, die höhere Löhne verlangen können. Den Kapitalisten kann es nicht gelingen, ihre Verteilungsvorstellung dauerhaft durchzusetzen.[159] Die Ähnlichkeit zwischen diesem Klassenkampf im Verständnis von Marx und der antagonistischen Räuber-Beute-Beziehung von Tierpopulation blieb Goodwin nicht verborgen. [160]

4.4 Das Goodwin-Modell und die Nachwelt

Goodwins Arbeit blieb relativ lange unbemerkt. Abgesehen von einigen Artikeln, in denen sein Modell zitiert wurde und von der ersten, im Jahre 1973 publizierten Modellerweiterung durch **Desai** musste man auf den Durchbruch etwa zehn Jahre lang warten. Das geringe Interesse mag an der bis in die siebziger Jahre dauernden Depression der Konjunkturtheorie oder an der Besonderheit des von Goodwin gewählten Publikationsorgans (Festschrift für einen marxistisch orientierten Wirtschaftswissenschaftler) gelegen haben.[161] Ab Ende der siebziger Jahre erschienen

---

[157] Vgl. Goodwin (1972), S. 449.

[158] „Since its first appearance capitalism has been characterized by alternating ups and downs. This paper attempts to give more precise form to an idea of Marx's – that it can be explained by the dynamic interaction of profits, wages and unemployment." Goodwin (1972), S. 442.

[159] Beschreibung der zyklischen Wechselwirkung mit Worten von Marx: „… die Akkumulation erschlafft infolge des steigenden Arbeitspreises, weil der Stachel des Gewinns abstumpft. Die Akkumulation nimmt ab. Aber mit ihrer Abnahme verschwindet die Ursache ihrer Abnahme, nämlich die Disproportion zwischen Kapital und exploitabler Arbeitskraft. Der Mechanismus des kapitalistischen Produktionsprozesses beseitigt also selbst die Hindernisse,, die er vorübergehend schafft. Der Arbeitspreis fällt wieder auf ein den Verwertungsbedürfnissen des Kapitals entsprechendes Niveau…" Marx (1962), S. 648.

[160] „It has long seemed to me that Volterra's problem of the symbiosis of two populations – partly complementary, partly hostile – is helpful in the understanding of the dynamical contradictions of capitalism, especially when stated in a more or less Marxian form." Goodwin (1972), S. 445.

[161] Vgl. Vosgerau (1982). S. 3.

aber zahlreiche Publikationen, die die Stabilitätseigenschaften und andere Charakteristika des Goodwin-Modells untersuchen, seine Modifikationen, Erweiterungen und Verallgemeinerungen behandeln. Bis zum heutigen Tage dient das Modell als Ausgangspunkt für eine ständig wachsende Literatur über die Konjunkturtheorie. Die Beiträge verfolgen damit eine Anregung von Goodwin, der sein Modell als möglichen Ausgangspunkt für weitere Forschungen gesehen hat.[162] Seit Schumpeters Werk über die Entwicklung des Kapitalismus wird es für das vielleicht wichtigste Modell zyklischen Wachstums gehalten.

Hier soll nur ein kurzer Überblick über die wichtigsten Modellerweiterungen gegeben werden.[163]

- *Desai* (1973) integrierte als erster monetäre Größe und Erwartungen in den Modellrahmen.
- Die erste deutschsprachige Arbeit über das Goodwin-Modell stammt von *Becker* (1975), der erweiterte Spar- und Investitionsfunktionen verwendet.
- *Velupillai* (1979) untersucht die Stabilitätseigenschaften des Goodwin-Modells sowie die Konsequenzen einer nichtlinearen Phillips-Kurve im ursprünglichen Modell.
- Die Variabilität der Kapazitätsauslastung steht im Mittelpunkt eines Beitrags von *Glombowski* (1979).
- *Shah* und *Desai* (1981) berücksichtigen zusätzlich Produktivitätsschwankungen in ihrer Arbeit.
- *Pohjola* (1981) untersucht zum ersten Mal irreguläre dynamische Entwicklungen. Er formt das stetige System in ein Modell mit diskreten Differenzengleichungen um.
- In der Modellmodifikation von *Cugno/Montrucchio* (1982) werden global stabile Ergebnisse mithilfe einer erweiterten Phillips-Kurve abgeleitet.

162 „Any Marxist-inclined economist should ask: why analyse an unreal, idealized system? The answer is that to show the logic and plausibility of a type of behaviour and of its analysis, it is essential to get it clearly and simply stated. If and when such an analysis finds wider acceptance, then it is not too difficult to make the model more realistic by incorporating additional, empirically valid assumptions." Goodwin(1972), S. 443.

163 Vgl. Vosgerau (1982), S. 3-4.

- *Wolfstetter* (1982) untersucht in seiner Arbeit, wie sich die Existenz von Staatsausgaben und -einnahmen sowie verschiedene Stabilitätspolitiken auf den Zyklus auswirken.
- Technischer Fortschritt wird im Modell von *van der Ploeg* (1983) berücksichtigt.

Als Beispiele der wichtigsten (dreidimensionalen) Verallgemeinerungen aus den späteren Jahren seien hier folgende Arbeiten erwähnt:

- *Di Matteo* (1984) untersucht im Rahmen des Goodwin-Modells alternative geldpolitische Konzeptionen, die Geldmengen- und die Zinssteuerung.
- *Bródy/Farkas* (1987) berücksichtigen, dass die Löhne nicht durch die tatsächliche, sondern durch die geplante Beschäftigung bestimmt werden. Die Planung als ständiger Lernprozess korrigiert den zukünftigen Plan aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Differenz zwischen den geplanten und wirklichen Größen.
- *Chiarella* (1990) führt eine Zeitverzögerung in der Phillips-Kurve wegen der trägen Lohnangleichung ein.
- *Manfredi/Fanti* (1999) berücksichtigen neben der Effizienzlohn-Hypothese eine Gestation-Verzögerung im Investitionsplan.

4.5 Zur Entstehung von Samuelsons Artikel

Samuelson publizierte seinen Aufsatz mit dem Titel „A Universal Cycle" ebenfalls 1967 – also im gleichen Jahr wie Goodwin seinen „Growth Cycle". Seine Arbeit wurde zu Ehren des überaus einflussreichen, im Jahre 2004 verstorbenen deutschen Wirtschaftsmathematikers Wilhelm Krelle geschrieben[164] und in der von R. Henn herausgegebenen Reihe „Methods of Operations Research"[165] veröffentlicht.

[164] Vgl. Brief von Samuelson an die Autorin im Anhang 1.
[165] Vgl. Vosgerau (1982), S. 3.

Samuelson führte diese Arbeit vier Jahre später und in einem 1974 publizierten Artikel[166] weiter; doch den Beitrag seines ehemaligen Tutors Goodwins erwähnt er in keinem der erwähnten Schriften.

Der Lotka-Volterra-Hintergrund

Die Grundidee seiner Studie entnahm Samuelson ebenfalls aus der Biologie, aus dem Lotka-Volterra-Modell. Als Literaturhinweis gibt er neben einem Artikel des russischen Mathematikers Kolmogorow noch zwei andere Quellen an: Lotkas Buch *Elements of Mathematical Biology* und Volterras *Leçon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*.

Im Gegensatz zu Goodwin weist Samuelson auch an anderen Stellen auf **Lotkas** Wirkung[167] hin, die schon in seinen früheren Werken zu entdecken ist. Der Einfluss von Lotkas Gedanken auf Samuelsons Analyse des Zusammenhangs zwischen Statik und Dynamik, den er in seinem Korrespondenzprinzip formulierte, findet ebenfalls Erwähnung, u. a. an der authentischsten Stelle, in dem berühmten, im Jahr 1947 veröffentlichten Buch *Foundations of Economic Analysis* [168].

Obwohl Lotka die Arbeiten der Wirtschaftsmathematiker, wie z. B. die von Cournot, Jevons, Edgeworth oder Pareto kannte, und in seinem *Elements of Mathematical Biology* auch Fragen aus dem Bereich der Ökonomie behandelte, ist es eine Ironie des Schicksals, dass seine Wirkung auf die Ökonomie nur in indirekter Weise, über seine mathematischen Modelle, und nicht direkt, durch seine inhaltliche Analyse der Ökonomie der Natur zur Geltung kam.

---

[166] Samuelson (1971) und Samuelson (1974).

[167] „…it was Edgeworth, Walras, Pareto, Gibbs, E.B. Wilson, Griffith Evans, Frank Ramsey, Bowley, R.D.G. Allen, Hicks, Frisch, Lotka, Leontief, and von Neumann who were my masters." Barnett (2004), S. 534.
Und anderswo: „See … for more detail on my admiration for Lotka." Samuelson (1998), S. 1383.

[168] Samuelson (1947), S. 292, 309, 323.
Samuelson über Lotkas Wirkung im Artikel über die Entstehung der *Foundations*:
„My major benefit form Lotka came in connection with *dynamics* (as for example his autonomous one-sex population growth model, and his Lotka-Volterra predator-prey model). …it was his *physical*-reductionist biology that interested me…" Samuelson (1998), S. 1383.

Samuelson wandte sein Interesse den **Volterra**-Modellen – wie er in seinem Brief an die Autorin dieser Arbeit vom 17. August 2006 schreibt[169] – schon während seiner Studien der Integralgleichungen in den dreißiger Jahren zu. Seiner Ansicht nach wiederholte sich Volterra oft, und konzentrierte sich zu viel auf konservative dynamische Systeme, die strikt periodische Bewegungen aufweisen. Realistische Gesetze der sinkenden Erträge würden diese periodischen Bewegungen dämpfen.

Samuelsons Erörterungen über die Modellverallgemeinerung durch steigende Skalenerträge entsprechen im Wesentlichen dem Ansatz, auf dessen Basis Kolmogorow 1936 das Volterra-Modell verallgemeinerte.[170]

[169] Vgl. Anhang 1.

[170] Kolmogorow beschrieb die Interaktion von zwei Spezies von Volterras Differenzialgleichungen ausgehend mit den folgenden Gleichungen einer weitaus allgemeineren Form: $\dot{N}_1/N_1 = K_1(N_1, N_2)$; $\dot{N}_2/N_2 = K_2(N_1, N_2)$. Zu den Funktionen K_1, K_2 (und zu ihren Ableitungen) definierte er auch einige Bedingungen, die bestimmte biologische Effekte realitätsnah berücksichtigen. Kolmogorow zeigte, dass außer der Spirale und dem Knoten, auch die Grenzzyklen zu den möglichen Verhaltensformen des Systems gehören. Obwohl die allgemeine Theorie der Differenzialgleichungen implizit diese Möglichkeit schon umfasste, wies Kolmogorows Arbeit zum ersten Mal ausgesprochen im ökologischen Zusammenhang auf die Existenz von Grenzzyklen hin. Vgl. Scudo/Ziegler (1978), S. 62.
In der Literatur sind Kolmogorow-Verallgemeinerungen des Goodwin-Modells auch bekannt, z. B. die Arbeit von Sportelli (1995).

5. Weitere Anwendungsbereiche in der Ökonomie - Literaturübersicht

Die bisherige Darstellung hat gezeigt, dass das Lotka-Volterra-Modell in den Wirtschaftswissenschaften erfolgreich eingesetzt wurde. Die berühmtesten ökonomischen Anwendungen betreffen die Konjunkturtheorie, aber auch andere ökonomische Interpretationen und damit anhaltende zyklische Schwankungen können mit den Lotka-Volterra-Gleichungen verbunden werden, wie u. a. in der ökonomischen Theorie regenerativer natürlicher Ressourcen.

Die Literatur zu diesem Thema kann nach mehreren Kriterien klassifiziert werden. Ein Aspekt wäre zum Beispiel nach dem untersuchten Gebiet, nach dem Anwendungsbereich zu klassifizieren. Eine andere Grundlage für die Klassifizierung könnte die Weiterentwicklung, Verallgemeinerung und Ergänzung des Modells (Erweiterung mit dem logistischen Wachstum, optimale Steuerung, mehrdimensionale Modelle, usw.) sein. Obwohl eine Klassifizierung auf der Grundlage der Weiterentwicklungen des Modells aus der Perspektive der Hauptrichtung der Dissertation vielleicht zweckmäßiger wäre, wähle ich die Anwendungsgebiete als Grundlage, weil ich im Vorigen auch die Anwendungen des Basismodells in mehreren Bereichen erforscht habe.

In diesem Kapitel wird ein Überblick über weitere ökonomische Anwendungsgebiete und Anwendungen des Lotka-Volterra-Modells gegeben, zunächst in der Konjunkturtheorie, gefolgt von den Modellen der Innovationstheorie, Ressourcenökonomik und Siedlungsgeographie.

5.1 Andere ökonomische Anwendungen in der Konjunkturtheorie

In dem von Gerold *Blümle* entwickelten Konjunkturmodell[171] werden die Differenzgewinne der Unternehmen als Motor der konjunkturellen Entwicklung betrachtet.

[171] Siehe dazu Blümle (1989), Schohl (1999), S. 144-149.

Grundlage seines Ansatzes ist der innovative Unternehmer von Schumpeter, der bei hohen Gewinnerwartungen mehr investiert. Die Gewinnerwartungen stehen den realisierten Gewinnen gegenüber, die Differenz bezeichnet Blümle als Differenzgewinne.

Damit kann für ein Produktionsverfahren eine Verteilung der Differenzgewinne betrachtet werden, die letztendlich auf den unterschiedlichen individuellen Gewinnerwartungen der Akteure beruht. Bezüglich dieser Verteilung setzt Blümle voraus, dass sie lognormal ist,[172] die für das Modell vorteilhafte Eigenschaft hat, dass mit der Erhöhung der Streuung auch der Erwartungswert steigt. Für das Modell bedeutet dies, dass eine erhöhte Streuung der Gewinnerwartung den Erwartungswert dieser erhöht und damit zu Investitionen stimuliert. Mit anderen Worten führt eine Erhöhung der Streuung der Differenzgewinne (v) zu einem Anstieg der Investitionsquote ($IQ = I/Y$):

$$w_{IQ} = \frac{dIQ/dt}{IQ} = -a_1 + a_2 v \tag{5.1}$$

Mit steigenden Investitionen in den ertragsträchtigen Bereichen werden die Erwartungen immer realistischer und deswegen sinkt die Differenz zwischen den Erwartungen und den tatsächlichen Gewinnen:

$$w_v = \frac{dv/dt}{v} = b_1 - b_2 IQ \tag{5.2}$$

wobei a_1, a_2, b_1 und b_2 positive Konstante sind.

[172] Vgl. Blümle (1989), S. 22 und Aitchison/Brown (1957), S. 110.

In Blümles Modell sind die treibenden Kräfte der periodischen Bewegungen, die letztendlich die Zyklen generieren, im Grunde die Innovationen und die dadurch existierenden Gewinnunterschiede.[173]

5.2 Innovation

Bei dem, von Angelo *Fusari* vorgestellten Modell[174] steht der dynamische Wettbewerb im Mittelpunkt. Sein Ansatz zeigt große Ähnlichkeit mit dem Modell von Blümle. Die Differenzgewinne bei Blümle gehen hier in erwarteten Profitraten über und die gesamtwirtschaftliche Innovationsrate wird hier durch adaptives Unternehmertum – von Fusari als Grundlage für Marktungleichgewicht bezeichnet – ersetzt.

Der wirtschaftliche Wettbewerb wird im Modell von Fusari durch die Sucht nach Profit getrieben. Dies kann zwei Formen annehmen: einerseits die Schaffung neuer Profitmöglichkeiten durch Innovation (von Fusari als „innovatives Unternehmertum“ bezeichnet), andererseits die systematische Ausnutzung vorhandener Profitchancen (synthetisiert durch die Varianz der Profitrate) aufgrund von Marktungleichgewichten („adaptives Unternehmertum“).

Innovatives Unternehmertum verursacht Ungleichgewichte, Veralterung des in der Produktion verwendeten Kapitals oder des Wissens, Erhöhung der Varianz der Profitraten und Unsicherheit, während adaptives Unternehmertum die führende Kraft

[173] Es gibt noch weitere Anwendungen, wie z. B. ein sehr interessantes Experiment, in dem versucht wird, die Mikroökonomie und die Makroökonomie zu verbinden. Dies bedeutet, dass eine der Variablen des Lotka-Volterra-Modells mikroökonomische Beziehungen darstellt, die andere makroökonomische, siehe das Modell von Schohl (1999) bzw. das gerade vorgestellte Modell von Blümle. Allerdings sind die Anwendungen, die nach Blümle auf seinem Modell basieren, aus verschiedenen Aspekten schwer zu interpretieren:

1) Stellt der Konjunkturzyklus die Entwicklung auf Makro- oder Mikroebene dar?
2) Was ist die Botschaft dieses Modells / dieser Modelle:
   a) Kann es auch Konjunkturzyklen auf Mikroebene geben?
   b) Werden Konjunkturzyklen auf Makroebene versucht, mit mikroökonomischen Zusammenhängen zu interpretieren?
3) Was garantiert die Erhöhung der Renditenvarianz, wenn sie gegen Null tendiert oder Null erreicht?

Im Kontext des Konjunkturzyklus sollte eine endogene Erklärung gegeben werden. Schohl arbeitet mit Schumpeters Unternehmer an dieser Stelle, aber Innovationsanstöße sind nicht unbedingt endogen.
Daher ist diese Modellgruppe nicht Gegenstand dieser Arbeit.

[174] Siehe dazu Fusari (2005).

der Anpassungsprozesse zu neuen Gleichgewichten ist, und dadurch die Verringerung von Ungleichgewichten und Unsicherheiten impliziert.

Für innovatives Unternehmertum sind wegweisende neue Investitionen kennzeichnend, während adaptives Unternehmertum durch die kontinuierliche Revision der produktiven Entscheidungen, stimuliert durch die Variabilität der Profitraten und Erwartungen, realisiert wird.[175]

Der dynamische Wettbewerb ergibt sich aus der Wechselwirkung der beiden genannten unternehmerischen Verhaltensweisen, wobei das innovative Verhalten durch die Anzahl der Patentanmeldungen erfasst wird. Diese Wechselwirkung kann durch das folgende System von Differenzialgleichungen beschrieben und formalisiert werden:

$$\dot{P} = b_1 P - b_2 PV \tag{5.3}$$

$$\dot{V} = -b_3 V + b_4 PV \tag{5.4}$$

P(t) stellt Patentanmeldungen (als Indikator für Innovation) und *V(t)* die Standardabweichung der Profitraten zwischen Firmen dar.

Der Parameter b_1 ist die konstante exponentielle Wachstumsrate der Innovation (Patentanmeldungen) – laut Fusari Ausdruck des autonomen Drucks auf Innovationen durch unternehmerische Aggressivität;[176] b_3 ist die negative exponentielle Wachstumsrate der Standardabweichung der Profitraten; in der Abwesenheit von Innovation nimmt die Standardabweichung wegen der adaptiven Suche nach Profit exponentiell ab. Die gegenseitige Beeinflussung vermindert die Innovation, vermehrt aber die Standardabweichung der Profitraten; die entsprechenden Koeffizienten sind b_2 und b_4.

In einem anderen Beitrag[177] untersucht Fusari im Rahmen eines ähnlichen Modells die Interaktion zwischen Innovation und Unsicherheit, die im Zentrum von Wachstum und

[175] Vgl. Fusari (1996) S. 166.
[176] Fusari (2005), S. 21.
[177] Siehe dazu Fusari (2013).

Entwicklung stehen, und als Ausdruck des Prozesses des dynamischen Wettbewerbs verstanden werden können.

In diesem Modell

$$\dot{P} = b_1 P - b_2 PU \tag{5.5}$$

$$\dot{U} = -b_3 U + b_4 PU \tag{5.6}$$

stellt *P(t)* genauso die Patentanmeldungen, *U(t)* jedoch die erhebliche Unsicherheit (Volatilität der Meinungen, als Indikator für Erwartungen) oder alternativ die Standardabweichung der Profitraten zwischen Firmen (als Indikator für die Unsicherheit) dar.

5.3 Ressourcenökonomik

Auch im Kontext der ökonomischen Theorie natürlicher Ressourcen wurde der grundlegende Gedankengang von Lotka und Volterra angewendet, allerdings nicht in der ursprünglichen, sondern in erweiterter Form.[178] Der Grund ist, dass sich in diesem Bereich die „Beute“ – die Ressourcen – gemessen an den Räubern – den Wirtschaftsakteuren – nicht schnell genug reproduzieren können. Die Ausbeutungsrate der Ressourcen übersteigt ihre Reproduktionsrate.

Deshalb wurde in der theoretischen Ökologie das klassische Lotka-Volterra-Modell mit dem logistischen Wachstum mehr den realen Bedingungen angepasst:[179]

$$\dot{x} = Ax\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - Bxy \tag{5.7}$$

$$\dot{y} = Dy\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) + Cxy \tag{5.8}$$

mit $A, D, B, C, K_1, K_2 > 0$ [180]

[178] Z. B. Wacker/Blank (1998), Wacker/Blank (1999).
[179] Z. B. durch die Arbeit von Gause (1934).

x(t) und *y(t)* stellen genauso wie im klassischen Lotka-Volterra-Modell die Anzahl der Beute- bzw. Raubtiere dar. Es ist aber eine begrenzende Kapazität vorhanden (z. B. begrenztes Nahrungs- oder Rohstoffangebot), so dass die Ab- bzw. Zunahme innerhalb einer Zeiteinheit proportional zum verfügbaren Rest dieser Kapazität ist. K_1 und K_2 sind die tragenden Kapazitäten des Lebensraumes (maximale Populationsgrößen), d. h., je mehr Individuen existieren, desto geringer sind aufgrund der begrenzten Ressourcen ihre Entwicklungschancen. Jede Population folgt also einem logistischen Wachstum, hinzu kommen die die Interaktion beschreibenden Parameter *B* und *C* mit der gleichen Bedeutung wie im klassischen Modell (vgl. Punkt 2.1). Siehe z. B. Hevér (2009).[181]

Die Stabilitätseigenschaften dieses Modells werden im Folgenden nach der gleichen Methode (mittels Linearisierung) untersucht, wie im Falle des klassischen Modells (vgl. Punkt 2.2)

Das System (5.7)-(5.8) hat für $\dot{x} = \dot{y} = 0$ einen (nicht-trivialen) Gleichgewichtspunkt:

$$x^* = -\frac{D}{C}\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) \tag{5.9}$$

$$y^* = \frac{A}{B}\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) \tag{5.10}$$

woraus

$$x^* = \frac{A\frac{D}{K_2} - BD}{\frac{AD}{K_1 K_2} + BC} \tag{5.11}$$

und

$$y^* = \frac{AC + D\frac{A}{K_1}}{\frac{AD}{K_1 K_2} + BC} \tag{5.12}$$

[180] Vgl. Wacker/Blank (1998), S. 133, mit etwas anderen Bezeichnungen der Parameter.

[181] So untersucht z. B. Hevér in ihrem Aufsatz, der sich nicht mit ressourcenökonomischen Fragen beschäftigt, die Wechselwirkung von Agglomeration und Technologie mit einem System von zwei nicht-linearen Differenzialgleichungen, wobei die zahlenmäßige Veränderung der einen Variablen (Anzahl von Unternehmen pro Flächeneinheit) in der Zeit dem logistischen Wachstum folgt.

mit positiven Werten für beide Variablen, der die zeitliche Konstanz der Individuen der Populationen bedeutet.

Die Elemente der Jacobi-Matrix in diesem (nicht-trivialen) Gleichgewichtspunkt ergeben folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{K_1} x^* & -Bx^* \\ Cy^* & -\frac{D}{K_2} y^* \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

Das Spur-Determinanten Kriterium hat das Ergebnis:

$$\text{Det } \mathbf{J} = \frac{AD}{K_1 K_2} x^* y^* + BC\, x^* y^* > 0 \tag{5.14}$$

$$\text{Sp } \mathbf{J} = -\frac{A}{K_1} x^* - \frac{D}{K_2} y^* < 0 \tag{5.15}$$

Das Gleichgewicht des mit dem logistischen Wachstum erweiterten Räuber-Beute-Modells ist asymptotisch stabil, da die Determinante der Jacobi-Matrix ein positives, die Spur der Jacobi-Matrix ein negatives Vorzeichen hat. Wenn die Bedingung

$$\left(\frac{A}{K_1} x^* + \frac{D}{K_2} y^* \right)^2 \geq 4 \left(\frac{AD}{K_1 K_2} + BC \right) x^* y^* \tag{5.16}$$

erfüllt ist, ist der Gleichgewichtspunkt G (x^*, y^*) ein stabiler Knotenpunkt, wenn nicht, ist G ein stabiler Spiralpunkt.[182]

Es ist ersichtlich, dass die Annahme logistischen Wachstums die grundlegenden Stabilitätseigenschaften des Modells qualitativ verändert.

[182] Vgl. Boyce/DiPrima (1995), S. 557-558.

Im Mittelpunkt der bisherigen Untersuchungen stand die Interaktion der zwei Populationen. Im Kontext der Ressourcenökonomik ist die Frage aber auch relevant, was mit der Interaktion passiert, wenn ein gewisser Anteil des Bestandes (der Bestände) durch einen externen Eingriff verringert (z. B. abgefischt) wird.

Wenn die Nutzung durch den Menschen im Modell auch berücksichtigt wird, geht man üblicherweise davon aus, dass ein konstanter Bruchteil des einen Bestandes oder beider Bestände ausgebeutet wird. Das nicht genutzte System (5.7)-(5.8) wird in diesem Falle – z B. hier bei Nutzung des Räuberbestandes[183] – zu:

$$\dot{x} = Ax\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - Bxy \tag{5.7}$$

$$\dot{y} = Dy\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) + Cxy - Ey \tag{5.17}$$

wobei E den Anteil des Bestandes angibt, der geerntet wird.[184]

Das auf diese Weise entwickelte dynamische Modell, das die mit dem Lotka-Volterra-Modell beschriebene Wechselwirkung aufgreift, bildet den Ansatzpunkt von vielen heutigen Räuber-Beute-Modellen in der Ressourcenökonomik (z. B. Fischerei-Modelle).

Um beim Problem des Abfischens zu bleiben ist es natürlich notwendig, dass höchstens so viele Räuberfische abgefischt werden, dass ihr Überleben aufgrund ihrer natürlichen Fortpflanzungsrate auf lange Sicht gesichert ist. Dementsprechend bezieht sich das optimale Verhalten des Abfischens nicht auf einen bestimmten Zeitpunkt, sondern auf einen bestimmten, unter Umständen sogar unendlich langen Zeitraum.

Angesichts der Tatsache, dass die Entwicklung des Räuberbestandes nicht nur von der Geburten- und Sterberate der eigenen Population sondern auch von der Entwicklung der

[183] In unserem Beispiel hier – wie auch in manchen Modellen in der Literatur – wird angenommen, dass nur der Räuberbestand genutzt wird. Der Grund dafür kann sein, dass die Nutzung der Beute keinen wirtschaftlichen Wert hat und dementsprechend nur der Räuberbestand geerntet wird.
[184] Vgl. Wacker/Blank (1998), S. 136.

Beutepopulation abhängt, bedeutet die Lösung des Problems, dass beide Fischarten einer äußeren Beeinflussung unterliegen, die einerseits die erwähnte Bedingung (Überleben der Populationen) erfüllt und durch die Ernte maximale Erträge sichert. Mit solchen Fragen befasst sich die Theorie der optimalen Steuerung.

Bei der Theorie der optimalen Steuerung geht es also darum, dass sich ein dynamisches System durch seine Eigenbewegung, also durch die Interaktion der durch die Variablen widergespiegelten Erscheinungen, auf einem bestimmten Pfad bewegt. Es wird nun versucht, das gesamte System in eine gewünschte Richtung oder in einen gewünschten Zustand zu bringen, wobei im Wesentlichen nach einem Pfad der Steuerung gesucht wird, um das System in einen gewünschten Zustand zu bringen.

In unserem bisherigen einfachen Räuber-Beute-System (5.7) und (5.17) wird letztendlich nur der Räuberbestand wirtschaftlich genutzt, wenn er z. B. zum Stückpreis *p* verkauft wird.

So ergibt sich z. B. die folgende Zielfunktion:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-\rho t}(py - qy)E\,dt \tag{5.18}$$

wobei q die Fangstückkosten und ρ die gesellschaftliche Zeitpräferenzrate sind; letztere bedeutet, dass eine hohe gesellschaftliche Zeitpräferenzrate das Gewicht der der Gegenwart näher stehenden Profite im Gesamtprofit erhöht.

Der Ausdruck $(py - qy)E$ in (5.18) ist der Gewinn, der mit einer Wichtefunktion $e^{-\rho t}$ multipliziert wird, deren Wert mit steigender gesellschaftlicher Zeitpräferenzrate sinkt, was bedeutet, dass der Wert der Wichtefunktion sinkt, wenn die Wirtschaftsakteure die gegenwärtig erzielbaren Profite mehr präferieren, als die in entfernterer Zukunft real zu erwartenden Gewinne.

Aus Gl 5.17 ist ersichtlich, dass der Bestand der Räuberfische auch von der Anzahl der Beutetiere abhängig ist. Die Aufgabe des durch die Zielfunktion gegebenen

Ressourcenmanagements, den Gewinnstrom aus der Nutzung der Räuber über ein Zeitintervall zu maximieren, bezieht sich somit nicht nur auf die Beeinflussung des Räuberbestandes, sondern muss auch der Entwicklung der Beutetiere Aufmerksamkeit widmen.

Diese mit Hilfe des Maximumprinzips lösbare Erweiterung der betrachteten dynamischen Systeme stellt einen außerordentlich interessanten methodischen Ansatz dar[185], der allerdings außerhalb der Fragestellung dieser Schrift liegt. [186]

Im Kontext der menschlichen Bevölkerung wurde eine Variante des Basismodells von *Brander und Taylor* (1998) verwendet, um den Aufstieg und Niedergang einer frühen Zivilisation zu erklären. In seiner Philosophie ähnelt dieses Modell stark Malthus' Bevölkerungstheorie. Das Modell der Bevölkerungs- und erneuerbaren Ressourcen-Dynamik wird durch die folgenden Differenzialgleichungen beschrieben:

$$\dot{S} = rS\left(1 - \frac{S}{S_{\max}}\right) - H \tag{5.19}$$

$$\dot{L} = L\left(b - d + \phi\frac{H}{L}\right) \tag{5.20}$$

wobei L die menschliche Populationsgröße zum Zeitpunkt t; S die Bestandsgröße der natürlichen Ressource zum Zeitpunkt t; r die Regenerationsrate der natürlichen Ressource; S_{max} die tragende Kapazität bezüglich des Ressourcenbestandes; $H(t) = \alpha\beta L(t)S(t)$ das gleichgewichtige Nutzungsniveau der Ressource – mit den positiven Parametern α und β – ist; ϕ die Auswirkung des Pro-Kopf-Verbrauchs der genutzten Ressource auf das Bevölkerungswachstum und schließlich (*b-d)* die Netto Geburtenrate bezeichnet.

[185] Vgl. Goh/Leitmann/Vincent (1974).
[186] Weitere Artikel zu diesem Thema: Hannesson (1983), Ragozin/Brown (1985), Wilen/Brown (1986), Ströbele/Wacker (1991), Brown et al. (2005).

In diesem modifizierten Räuber-Beute-Modell entspricht die menschliche Bevölkerung – aufgrund der identischen formalen Struktur – der Räuber- und der Ressourcenbestand der Beutepopulation, die einem logistischen Wachstum folgt.

Brander und Taylor zeigten, dass das Modell für vernünftige Parameterwerte einen Boom- und Bust-Zyklus erzeugt. Wenn die Ressourcenbasis eine langsamere Regenerationsrate aufweist als die Bevölkerung, dann wächst die Population, die Ressourcenbasis wird abgebaut, und das System bricht letztendlich zusammen. Eine schneller wachsende Ressourcenbasis ermöglicht dagegen eine Konvergenz zur gleichgewichtigen Ressourcen- und Populationsgröße.

5.4 Regionale und städtische Dynamik

Auch im Kontext siedlungsgeografischer und sozioökonomischer Phänomene wie z. B. bei der Erforschung der Entwicklung von Städten wird das Lotka-Volterra-Modell verwendet, da es einen guten Ausgangspunkt zur Interpretation der städtischen und regionalen Wachstumszyklen bietet.

Das Modell von Dendrinos

Dendrinos (1980) schlug mit der Interaktion zwischen der Stadtbevölkerung x (der Räuber) und deren Pro-Kopf-Einkommen y (die Beute) eine etwas modifizierte Version des klassischen Lotka-Volterra-Modells für die Beschreibung der städtischen Dynamik vor.

Das Ziel der Analyse ist zunächst das Aufstellen eines klassischen Lotka-Volterra-Modells, wobei Dendrinos die Wechselwirkung zwischen der Einwohnerzahl und dem ihnen durch die Siedlung gebotenen Nutzen betrachtet. Er verwendet das Pro-Kopf-Einkommen als Proxy für den Nutzen und nimmt an, dass es einen optimalen oder durchschnittlichen Wert[187] sowohl für den Nutzen (Einkommen) als auch für die Einwohnerzahl gibt. In Bezug auf das Wachstum der Einwohnerzahl wird davon

[187] Bei diesen beiden Konzepten gibt es keine klare Unterscheidung.

ausgegangen, dass dies von der Differenz zwischen dem aktuellen Pro-Kopf-Einkommen und dem durchschnittlichen Einkommen abhängt (5.21). Das Wachstum des Pro-Kopf-Einkommens hängt auf der anderen Seite von der Differenz zwischen der durchschnittlichen und der aktuellen Einwohnerzahl ab (5.22)

$$\dot{x} = k\left(y - \bar{y}\right)x \tag{5.21}$$

$$\dot{y} = h\left(\bar{x} - x\right)y \tag{5.22}$$

wobei *k* bzw. *h* Parameter für Geschwindigkeitsanpassungen sind.[188]

Aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich ein klassisches Lotka-Volterra-Modell (5.23)-(5.24), laut dessen ein höheres Pro-Kopf-Einkommen (*y*) in einem bestimmten Gebiet die Bevölkerung (*x*) anzieht, aber die daraus folgende Erhöhung der Anzahl der Menschen zu einer Senkung des Pro-Kopf-Einkommens führt, was die Attraktivität des Gebiets verringert.

$$\dot{x} = \left(ky - m\right)x \tag{5.23}$$

$$\dot{y} = \left(n - hx\right)y \tag{5.24}$$

Die Argumentation des Autors ist allerdings nicht in allen Schritten nachvollziehbar, denn aus dem Lotka-Volterra-Modell ist ersichtlich, dass der stationäre Punkt

$$x^* = \bar{x} \tag{5.25}$$

$$y^* = \bar{y} \tag{5.26}$$

ist, mit anderen Worten, der Autor entwickelt das Lotka-Volterra-Modell um die Lösung.

Sicherlich wird Dendrinos erkannt haben, dass das Lotka-Volterra-Modell für derartige Analysen zu speziell ist, deswegen ergänzt er es u.a. mit einem Coautor.[189]

[188] Dendrinos (1980), S. 90.
[189] Dendrinos und Mullally (1981).

So beachtet er unter anderem, dass die Stadt nicht unbegrenzt wachsen kann (Überbelastung, Überbevölkerung) und führt mit $(-a_{11}x)$ einen Faktor ein, der die Bevölkerungsentwicklung bremst. Die räumliche Dynamik wird nun durch die folgenden Differenzialgleichungen beschrieben:

$$\dot{y} = y(a_2 - a_{21}x) \tag{5.27}$$

$$\dot{x} = x(-a_1 - a_{11}x + a_{12}y) \tag{5.28}$$

mit a_1, a_{12}, a_2, $a_{21} > 0$

Es kann gezeigt werden, dass im Falle $a_{11} > 0$ sich das Systems auf ein stabiles Gleichgewicht zubewegt.[190]

Das Modell von Orishimo

Orishimo (1987) untersucht die zyklischen Eigenschaften des Urbanisierungsprozesses mithilfe des klassischen Lotka-Volterra-Modells, aber mit neuer Rollenverteilung. In Orishimos Modell wird eine bestimmte Landfläche mit konstanter Größe zugrunde gelegt. Die beiden interagierenden Variablen sind die Bevölkerung pro Landgröße (N) und der Landpreis ebenfalls pro Landgröße (R).[191]

Der Begriff des Landpreises kann bei Orishimo folgendermaßen interpretiert werden: die Bodenrente wird durch zwei Gruppen von Variablen erklärt, die natürlichen Eigenschaften des Bodens (Fruchtbarkeit, Lage, geografische Gegebenheit) und die Investitionen in die Bodenfläche (Kunstdünger, Straßen, Gebäude). Von zwei, gleiche natürliche Eigenschaften aufweisenden Landflächen wird jene eine höhere Bodenrente bewirken, in die mehr investiert wird.

Mit steigendem Kapitalbestand pro Landgröße steigt also die Rente und damit auch der Preis des Landstückes, der nichts weiter ist, als die Geldsumme, die, wenn ich sie anlege, ein der Bodenrente gleiches Zinseinkommen sichert.

[190] Vgl. auch Dendrinos (1980), S. 95. und Rosser (2011), S. 69.
[191] Es handelt sich hier um ähnliche Variablen wie im vorherigen Modell, wir verwenden jedoch andere Bezeichnungen, da wir diesbezüglich dem Originalartikel folgen.

Die Bevölkerung wächst auf dem betrachteten Gebiet mit der Wachstumsrate *A*, ein steigender Landpreis führt zur Abwanderung, d.h. die Wachstumsrate der Bevölkerung wird sich verringern (vgl. Gleichung (5.29)).

$$\dot{N} = N(A - BR) \tag{5.29}$$

$$\dot{R} = R(CN - D) \tag{5.30}$$

wobei

A den oben erwähnten Parameter bezeichnet,

B ein Erschöpfungskoeffizient (dem Bevölkerungswachstum entgegen) ist wie z. B. Umweltzerstörung,

C den positiven Effekt der Bevölkerung auf die steigende Rate der Landnutzungsintensität ausdrückt und

D die negative exponentielle Wachstumsrate des Landpreises in Abwesenheit der Bevölkerung (Landnutzung) ist.

Gleichung (5.30) soll den Zusammenhang ausdrücken, dass ein Anstieg der Bevölkerung und somit ein Anstieg der Nachfrage nach Boden zum Steigen des Landpreises führt.[192]

Aus den Gleichungen (5.29) - (5.30) ist es ersichtlich, dass – im Vergleich zu Dendrinos – in diesem Modell nun die Bevölkerung die Beute ist.

Mithilfe dieses Modells testet Orishimo die Gültigkeit des Modells für verschiedene japanische Städte.

Das Modell von Camagni

Camagnis Modell[193], das ebenfalls eine modifizierte Variante des klassischen Lotka-Volterra-Modells darstellt, beschreibt die dynamische Interaktion zwischen dem

[192] Allerdings ist schwer einsehbar, warum der Landpreis sinkt, wenn die Bevölkerungszahl Null ist, aber mit dieser fragwürdigen Voraussetzung kommt man zu einem Lotka-Volterra-Modell…

städtischen Einkommen (Y) und der städtischen Miete (r). Es wird dabei angenommen, dass das städtische Einkommen wegen des technologischen Fortschritts mit einer konstanten Rate wächst. Eine Erhöhung des städtischen Einkommens generiert eine steigende Nachfrage nach den städtischen Grundstücken und dadurch einen Anstieg der städtischen Miete, wodurch ein größerer Teil des Erlöses für die Grundstücksfinanzierung verwendet werden muss. Dies führt aber zu einem Rückgang der Gewinnmargen der Produktion. Infolgedessen nehmen die Investitionen ab, was das Wirtschaftswachstum in den betroffenen städtischen Gebieten einschränkt. Darüber hinaus wird auch angenommen, dass das städtische Einkommen nicht unbegrenzt wachsen kann (übermäßige Dichte).

Die dynamische Interaktion zwischen dem städtischen Einkommen (Y) und der städtischen Miete (r) wird nun durch das folgende System von Differenzialgleichungen beschrieben:

$$\dot{Y} = Y(a - bY - cr) \tag{5.31}$$

$$\dot{r} = r(-d + eY) \tag{5.32}$$

wobei

- a die exponentielle Wachstumsrate im Zusammenhang mit dem technischen Wandel und den endogenen städtischen Innovationen bezeichnet,
- b die negativen städtischen Skaleneffekte ausdrückt,
- c der Prädationseffekt der städtischen Miete auf das Wachstum ist,
- d die negative exponentielle Wachstumsrate der städtischen Miete mangels wirtschaftlicher Entwicklung ist und
- e den positiven Effekt des städtischen Einkommens auf die steigende Rate der städtischen Miete ausdrückt.

In diesem Modell funktioniert die städtische Miete als eine Art negativer Lokalisierungsfaktor,[194] da sie die Standortwahl beeinflusst: Ein Anstieg der städtischen

[193] Vgl. Camagni (1992), S. 383-386, Camagni (2016), S. 607-608, Capello/Faggian (2002), S. 182, 183, 185.
[194] Vgl. Camagni (1992), S. 384.

Miete treibt Wohnungssuche und Produktionsaktivitäten in Richtung Peripherie, die durch niedrigere Landmiete gekennzeichnet ist.[195]

Im Vergleich zu Orishimos Modell kommt die Rolle der Beute nicht mehr der Bevölkerung sondern dem städtischen Einkommen zu. Auf der anderen Seite, obwohl in beiden Modellen die städtische Miete / der Landpreis als Räuber funktionieren, hat die städtische Miete bei Camagni eine doppelte Funktion. Einerseits ist sie ein Ressourcenallokator, anderseits spielt sie eine Rolle in der Einkommensumverteilung.

Wie schon erwähnt wird in Camagnis Modell angenommen, dass das städtische Einkommen nicht unbegrenzt wachsen kann. Der Gleichung (5.31) entsprechend folgt das städtische Einkommen (Y) – die Beute in diesem Modell – dem logistischen Wachstum. Wenn $b = 0$, entspricht das System dem klassischen Volterra-Lotka-Modell und oszilliert harmonisch um das Gleichgewicht. Wenn $b > 0$, bewegt sich das Systems auf ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht[196] zu.[197]

Die meisten dieser Modelle der städtischen Dynamik wurden von den Entwicklern selbst oder von ihren Schülern auch empirisch getestet und analysiert. [Dendrinos bzw. Dendrinos/Mullally testen ihr Modell für US-Metropolen, Orishimo testet sein Modell für japanische Städte, Capello und Faggian (Schule von Camagni[198]) wenden Camagnis Modell praktisch auf das italienische Städtesystem an und testen in ihrem Aufsatz für mehrere italienische Städte die empirische Gültigkeit des Modells.[199]]

---

[195] Vgl. Capello/Faggian (2002), S. 182.

[196] Der Gleichgewichtspunkt ist in Abhängigkeit der Parameter des Gleichungssystems entweder ein asymptotisch stabiler Spiralpunkt oder ein Knoten, wenn $ae\text{-}bd > 0$ erfüllt ist [vgl. Boyce/DiPrima (1995) S. 609, 611 und 690.]

[197] Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass wenn das klassische Lotka-Volterra-Modell mit dem beschränkten Wachstum einer der oder beider Spezies erweitert wird [im Modell (5.7)-(5.8) – beide Spezies, im Modell von Dendrinos und Mullally – die Räuber, im Modell von Camagni – die Beute], in allgemeiner Schreibweise:

$$\dot{x} = x(a - by + ex) \tag{5.33}$$

$$\dot{y} = y(cx - d - fy) \tag{5.34}$$

sich das dynamische Verhalten des Systems verändert. Wenn die Bedingung $ac\text{-}de > 0$ erfüllt ist, nähern sich die Populationen einer konstanten Größe an, statt des periodischen Schwankens gibt es also einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt.

[198] Capello (2017), S. 20.

[199] In der ökonometrischen Untersuchung verwenden sie aber die städtische Bevölkerung (statt des städtischen Einkommens – wegen Mangels an Einkommensdaten auf aggregierter städtischer Ebene) und – wie bei Camagni – die städtische Miete als interagierende Variablen. Vgl. Capello/Faggian (2002), S. 185-186.

6. Theoretische Modellerweiterungen

Bisher haben wir gesehen, dass die ursprünglichen Lotka-Volterra-Eigenschaften nur unter sehr spezifischen Bedingungen vorstellbar sind. In diesem Kapitel werden einige der früher vorgestellten Modelle erweitert. Aufgrund des Vorherigen brauchen wir uns nicht zu wundern, wenn die ursprünglichen Eigenschaften des Lotka-Volterra-Modells dabei nicht alle beziehungsweise nicht immer zur Geltung kommen.

6.1 Berücksichtigung der Diffusion

6.1.1 Räuber-Beute-Interaktionen und Migration

Eine Berücksichtigung der Diffusion kann offensichtlich nur zwischen Populationen derselben Art erfolgen, also zwischen Räubern bzw. zwischen Beute. Daraus folgt, dass zur Behandlung der Frage zwei Lotka-Volterra-Modelle angenommen werden müssen. Dies kann am einfachsten so vorgestellt werden, dass die entsprechenden Räuber-Beute-Populationen im gleichen Raum leben.

In dieser Modellerweiterung wird die Rolle des Raumes, nämlich die Gegebenheiten des Raumes sowie ihre Einwirkung auf das System berücksichtigt. Die Dynamik der einfachsten räumlichen Erweiterung des Lotka-Volterra-Modells, ein Lotka-Volterra System in einem Habitat von zwei identischen, durch Migration verbundenen Regionen wird untersucht. Diese Modellerweiterung wird dann auf das Goodwin-Modell angewendet.

Das ursprüngliche Lotka-Volterra-Modell behandelt den Raum explizit nicht. Das Modell setzt stillschweigend voraus, dass er existiert, es ist also ein Raum im Newtonschen Sinne, der der Beute unbegrenzte Nahrung sichert, in dem die Bewegung der Räuber- und Beutetiere völlig nachvollziehbar ist.

Auch die räumliche Struktur kann aber im Modell berücksichtigt werden. Es gibt umfangreiche Literatur zur theoretisch-mathematischen Untersuchung der räumlich-zeitlichen Modelle, wobei der Raum sowohl kontinuierlich als auch diskret modelliert

wird. Im Rahmen einer diskreten Untersuchung, die auch hier verfolgt wird, ist die Umgebung in Zellen oder Regionen unterteilt, die durch Migration verbunden werden. (Das Kontinuum kann auch durch ein diskretes Modell angenähert werden.)

Wenn sich die Populationen zwischen den Regionen bewegen, können sie sich im Raum entweder zufällig bewegen, oder sie können sich als Reaktion auf die lokale Dichte der anderen Population bewegen, d. h. es gibt Querdiffusion. (Wenn z. B. die Anzahl der Raubtiere steigt, wird die Beute eine immer größere Tendenz haben, die gegebene Region zu verlassen; sinkt hingegen die Anzahl der Beutetiere, dann werden sich die Räuber andere Jagdgründe suchen.)

Eine wichtige Frage im Zusammenhang mit den räumlichen Räuber-Beute-Modellen ist die Wirkung der Migration auf die Stabilität der Räuber-Beute-Dynamik. Die meisten räumlich-zeitlichen Lotka-Volterra-Systeme haben einen sehr komplizierten mathematischen Hintergrund. (Es reicht, nur auf das Problem der Bifurkation hinzuweisen, die das System im Falle von Querdiffusion erfährt.[200])

Es wird hier die Dynamik des einfachsten räumlichen Modells überhaupt, genauer gesagt, des durch die Voraussetzung der Existenz eines abstrakten Raumes erweiterten Lotka-Volterra-Modells analysiert. Die dynamischen Eigenschaften eines Systems bestehend aus zwei identischen, gekoppelten Regionen werden untersucht, in dem die Dynamik innerhalb jeder der beiden Region durch ein Lotka-Volterra-Modell beschrieben wird. Die beiden Regionen sind durch die Migration gekoppelt. Migrierende Individuen bewegen sich zwischen den beiden Regionen mit konstanten Migrationsraten, sowie in Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Populationen. Dieser Modelltyp für die zwei, in zwei identischen Regionen lebenden Spezies nimmt die Form an:

[200] Vgl. z. B. Aly/Farkas (2004).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a - by_1) + r(x_2 - x_1) \\
\dot{y}_1 &= y_1(-d + cx_1) + s(y_2 - y_1) \\
\dot{x}_2 &= x_2(a - by_2) + r(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_2 &= y_2(-d + cx_2) + s(y_1 - y_2)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei x_i und y_i jeweils die Dichte der Beute- und der Räuberpopulation in der Region *i* bezeichnen; *a*, *b*, *c* und *d* die Parameter des ursprünglichen Lotka-Volterra-Modells sind; *r* und *s* die Migrationsraten der Beute- bzw. Raubtiere bezeichnen. Der Netto-Effekt der Beute-Migration z. B. in Region 1 wird dann $r(x_2 - x_1)$. Wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, sind die Migrationsterme Null und die Populationen weisen in beiden Regionen gleiche Veränderungsraten auf, also die Dichten (die Populationsgrößen) bleiben gleich.

Dieses System (6.1) hat einen positiven (nicht-trivialen) Gleichgewichtspunkt $x_1^* = d/c$, $y_1^* = a/b$, $x_2^* = d/c$ und $y_2^* = a/b$. Die Jacobi-Matrix des vierdimensionalen Systems, linearisiert im Gleichgewicht, ist:

$$\mathbf{J}(x_1^*, y_{1,}^* x_2^*, y_2^*) = \begin{bmatrix} -r & -b\frac{d}{c} & r & 0 \\ c\frac{a}{b} & -s & 0 & s \\ r & 0 & -r & -b\frac{d}{c} \\ 0 & s & c\frac{a}{b} & -s \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Das charakteristische Polynom des linearisierten Systems ist im Gleichgewichtspunkt $(x_1^*, y_{1,}^* x_2^*, y_2^*)$:

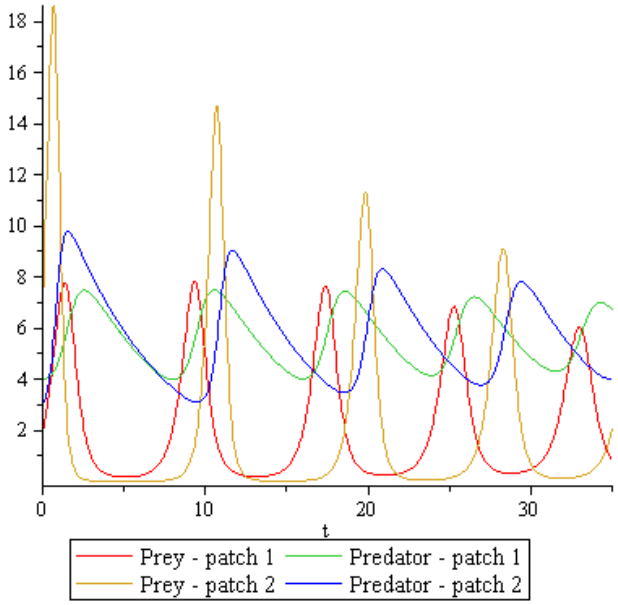
$$(\lambda^2 + ad)\left[\lambda^2 + 2\lambda(r+s) + ad + 4rs\right] = 0 \tag{6.3}$$

Wir wissen, dass der erste Faktor zwei rein imaginäre Eigenwerte hat, die gleichen, wie das Gleichgewicht des zweidimensionalen Lotka-Volterra-Modells. Die beiden anderen

Eigenwerte haben immer negative Realteile.[201] Die rein imaginären Eigenwerte bewirken eine Art zyklisches Verhalten des gesamten Systems, die von den Parametern *a* und *d* abhängen, nicht aber von den Migrationsraten. Wegen der Eigenwerte scheint das System (neutral) stabil, aber nicht asymptotisch stabil zu sein.

Um einen genaueren Einblick in die Dynamik des vierdimensionalen Lotka-Volterra-Systems zu erhalten, wurde das Gleichungssystem (6.1) mit dem Differenzialgleichungstool Maple numerisch gelöst (simuliert) und graphisch dargestellt. Ein typischer Zeitpfad des Modells mit zwei Regionen wurde in der Abbildung 6.1 dargestellt.

Abbildung 6.1: Räuber-Beute-Interaktionen im Zwei-Regionen-Modell



Quelle: Eigene Darstellung

Der Graph zeigt eine scheinbare Konvergenz der Zeitpfade der Beutepopulationen sowie der Zeitpfade der Räuberpopulationen in den zwei Regionen. Migrationsraten haben einen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Konvergenz.

Dies scheint mit den Ergebnissen von Jansen übereinzustimmen, wonach allfällige Unterschiede zwischen den Regionen bezüglich aller Lösungen des Zwei-Regionen-

[201] Die ausführliche Berechnung zur Stabilitätsuntersuchung befindet sich im Anhang 2.

Lotka-Volterra-Modells gemäß (6.1) mit positiven Ausgangsbedingungen sowie mit mindestens einer positiven Migrationsrate schließlich verschwinden werden. Mit anderen Worten werden also alle Lösungen synchronisiert.[202] Alle Unterschiede aufgrund der Anfangsbedingungen verschwinden im Laufe der Zeit und die Regionen werden schließlich identisch, das System oszilliert harmonisch um das Gleichgewicht.

6.1.2 Multiregionale Erweiterung des Goodwin-Modells

Diese räumliche Erweiterung des Lotka-Volterra-Modells, ein Lotka-Volterra-System bestehend aus zwei identischen Regionen, gekoppelt durch die Migrationen, wird nun auf das Goodwin-Modell angewendet.

Es gibt zwei Regionen. Der Kapitalkoeffizient (k), die Wachstumsrate des Beschäftigungspotenzials (g_L) und der Arbeitsproduktivität (g_A), sowie die Konstanten der linearen Phillips-Kurve γ_1, γ_2 sind die gleichen in beiden Regionen, während die Lohnquote (u) und die Beschäftigungsquote (v) in den einzelnen Regionen unterschiedlich sind.[203] Ein Grund dafür kann z. B. sein, dass die Macht der Gewerkschaften in beiden Regionen unterschiedlich ist. In der Region mit stärkerer Gewerkschaft wird eine höhere Lohnquote erkämpft, unterschiedliche Lohnquoten führen aber auch zu unterschiedlichen Beschäftigungsquoten.

Interregionale Bewegungen der Individuen der Erwerbsbevölkerung finden statt, was zu Veränderungen der Beschäftigungsquoten führt. (Im analogen Lotka-Volterra-Modell wandert nur die Beute.) In diesem Fall nimmt das Goodwin-Modell von zwei identischen Regionen die folgende Form an:

$$\dot{v}_1(t) = \left[\left(\frac{1}{k} - g_A - g_L\right) - \frac{1}{k}u_1(t)\right]v_1(t) + \rho\left[v_2(t) - v_1(t)\right]$$

$$\dot{u}_1(t) = \left[-(\gamma_1 + g_A) + \gamma_2 v_1(t)\right]u_1(t)$$

[202] Jansen (1994), S. 86 und Jansen (1995), S. 386.
[203] Unter diesem Gesichtspunkt ist dieses Modell ähnlich dem Ansatz Krugmans, wobei er die Agglomerationen so erklärt, dass die Werte einer Variablen in zwei grundsätzlich gleichen Regionen aufgrund externer Faktoren, Gegebenheiten und Bedingungen unterschiedlich sind. Vgl. Krugman (1991).

$$\dot{v}_2(t) = \left[\left(\frac{1}{k} - g_A - g_L\right) - \frac{1}{k}u_2(t)\right]v_2(t) + \rho[v_1(t) - v_2(t)] \tag{6.4}$$

$$\dot{u}_2(t) = [-(\gamma_1 + g_A) + \gamma_2 v_2(t)]u_2(t)$$

Bei unterschiedlichen Lohnquoten kommt es zu einer Wanderbewegung zur Region mit der höheren Lohnquote. Daher geht die Beschäftigung in der anderen Region zurück, die Löhne können dort erhöht werden, demzufolge beginnt eine Rückwanderung, die Beschäftigung erhöht sich und dadurch entwickelt sich ein Ausgleichsprozess.

Dementsprechend werden die Unterschiede in der Lohnquote und Beschäftigungsquote zwischen den Regionen langsam verschwinden.

Im Kapitel 7 werde ich zeigen, dass diese Argumentation auch durch empirische Befunde bestätigt werden kann.

6.2 Einführung des staatlichen Sektors

In diesem Abschnitt wird die Rolle des Staates im Realkapital-Humankapital-Modell untersucht. Dabei wird das im Kapitel 3.3 vorgestellte Grundmodell um den staatlichen Sektor (zuerst mit ausgeglichenem, dann mit unausgeglichenem Staatshaushalt)[204] erweitert und Stabilitätseigenschaften werden analysiert.

6.2.1 Realkapital-Humankapital-Modell mit ausgeglichenem Staatshaushalt

Die Produktion erfolgt nach der *AK*-Produktionsfunktion, wie im Basismodell:

$$Y = AK \tag{6.5}$$

Die Staatsausgaben (*G)* sind ein konstanter Anteil (*z*) des Sozialproduktes (*Y*), und der Staatshaushalt ist durch Steuereinnahmen (*T*) ausgeglichen:

[204] Zur Berücksichtigung des staatlichen Sektors vgl. das Modell in Wenzel (2001).

$$G = T = zY \tag{6.6}$$

Die Staatsausgaben (*G)* sind in den öffentlichen Konsum (*C*) und öffentliche Investitionsausgaben (*I*) aufgeteilt. Es wird davon ausgegangen, dass ein konstanter Bruchteil der Staatsausgaben für Investitionen verwendet wird. Öffentliche Investitionsausgaben sind daher:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{pub}} = \xi \mathrm{G}, \qquad 0 \le \xi \le 1, \tag{6.7}$$

wo ξ den Investitionsausgabenanteil an den Staatskäufen bezeichnet. Die öffentlichen Konsumausgaben sind daher:

$$C_{pub} = (1 - \xi)G \tag{6.8}$$

Darüber hinaus wird angenommen, dass private Ersparnisse einen konstanten Anteil (*s)* des verfügbaren Einkommens bilden, und der private Konsum dementsprechend gegeben ist durch:

$$C_{pr} = (1 - s)(1 - z)Y \tag{6.9}$$

Das Sozialprodukt ist die Summe der Konsumnachfrage, Investitionsnachfrage und Staatsausgaben:

$$Y = C_{pr} + I_{pr} + G \tag{6.10}$$

Es wird davon ausgegangen, dass privates und öffentliches Kapital perfekte Substitute sind. Der gesamtwirtschaftliche Kapitalstock ist die Summe beider Kapitalgüter:

$$K = K_{pr} + K_{pub} \tag{6.11}$$

Im Folgenden wird auch angenommen, dass

$$\dot{K}_{pr} = I_{pr} - \delta K_{pr} \tag{6.12}$$

und

$$\dot{K}_{pub} = I_{pub} - \delta K_{pub} \tag{6.13}$$

was einfach so viel bedeutet, dass die Nettoinvestition zur Änderung des Kapitalstocks beiträgt.

Aus diesen Annahmen und Zusammenhängen, mit Berücksichtigung von:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{6.14}$$

erhalten wir die Gleichung, die die Dynamik der Wirtschaft beschreibt:[205]

$$\dot{k}(t) = \left[sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta)\right]k(t) \tag{6.15}$$

Betrachten wir nun das Humankapital in diesem Modell. Die Produktion des Humankapitals wird wieder durch das Wachstum des Realkapitals finanziert:

$$\dot{k}(t) = \left[sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta) - \gamma\tau(t)\right]k(t) \tag{6.16}$$

Die Wachstumsrate des Humankapitals ist die gleiche lineare Funktion der Arbeitsproduktivität:

$$\dot{\tau}(t) = \left[-\alpha + \beta Ak(t)\right]\tau(t) \tag{6.17}$$

Das dynamische Verhalten des Modells wird durch die beiden Gleichungen (6.16) und (6.17) beschrieben, die ein Lotka-Volterra-Modell bilden, wenn:

$$sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta) > 0 \tag{6.18}$$

[205] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 3.

(diese Bedingung ist auch wegen der ökonomischen Interpretierbarkeit erforderlich), was so viel bedeutet, dass die Wachstumsrate des Pro-Kopf Realkapitalstocks im Modell – ohne Berücksichtigung des Humankapitals – positiv ist.

Aus dieser Ungleichung erhalten wir:[206]

$$\xi > s\left(1-\frac{1}{z}\right) \tag{6.19}$$

In diesem Fall ist die Gleichgewichtslösung des linearisierten Systems neutral stabil (die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind rein imaginär), und dies impliziert regelmäßige Zyklen dem ursprünglichen Lotka-Volterra-Modell entsprechend.

Die Gleichgewichtslösung des Systems:

$$k^{**} = \frac{\alpha}{\beta A} \tag{6.20}$$

und

$$\tau^{**} = \frac{As(1-z)+A\xi z-(g_L+\delta)}{\gamma} \tag{6.21}$$

Wenn diese Gleichgewichtslösung mit der des Realkapital-Humankapital-Modells ohne öffentlichen Sektor [(3.39) und (3.40)] verglichen wird, sieht man sofort, dass der staatliche Sektor nur die Gleichgewichtslösung des Humankapitals beeinflusst. Die Gleichgewichtslösung des Realkapitals bleibt unverändert.

Aus (6.19) ist ersichtlich, dass auch die Relation $\xi > s$ gegeben ist, d. h., wenn der Investitionsausgabenanteil der Regierung größer ist als die private Sparquote, auch im Falle von steigenden Steuern, wird die Bedingung, ein Lotka-Volterra-System zu haben, auf jeden Fall erfüllt.

Im Falle wenn $\xi = s$, nämlich wenn die Investitionsausgabenanteil der Regierung und die private Sparquote gleich sind, führen beide Modelle zu gleichen Gleichungen (mit und ohne Berücksichtigung eines ausgeglichenen Staatshaushalts).

[206] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 3.

6.2.2 Realkapital-Humankapital-Modell mit unausgeglichenem Staatshaushalt

Die Produktion erfolgt auch in diesem Fall nach der AK-Produktionsfunktion (6.5), wie im Basismodell. Nun werden aber staatliche Budgetdefizite zugelassen, und wir betrachten eine Regierung, die einer dynamischen Budgetrestriktion gegenübersteht:

$$\dot{B} = G - T + (r - \delta)B \tag{6.22}$$

Die Summe des primären Defizits $(G-T)$ und der Zinszahlungen $(r-\delta)B$ auf die staatliche Verschuldung muss durch die öffentliche Kreditaufnahme $\dot{B}$ finanziert werden. Wir nehmen an, dass der Zinssatz für Staatsanleihen dem Nettonutzungspreis des Kapitals $(r-\delta)$ entspricht.

Die Staatsausgaben (*G)* sind ein konstanter Anteil (η) des Sozialproduktes (*Y*):

$$G = \eta Y \tag{6.23}$$

aber der Staatshaushalt kann jetzt unausgeglichen sein.

Wir behalten die restlichen Verhaltenshypothesen des vorherigen Modells mit ausgeglichenem Staatshaushalt:

$$I_{pub} = \xi G, \qquad 0 \le \xi \le 1 \tag{6.7}$$

$$C_{pub} = (1-\xi)G \tag{6.8}$$

aber hier:

$$T = z[Y + (r-\delta)B] \tag{6.24}$$

und

$$C_{pr} = (1-s)[Y + (r-\delta)B - T] \tag{6.25}$$

Der gesamtwirtschaftliche Kapitalstock ist die Summe beider Kapitalgüter

$$K = K_{pr} + K_{pub} \tag{6.11}$$

und dem vorherigen Modell entsprechend:

$$\dot{K}_{pub} = I_{pub} - \delta K_{pub} \tag{6.13}$$

aber

$$\dot{K}_{pr} = I_{pr} - \delta K_{pr} = S - \dot{B} - \delta K_{pr} \tag{6.26}$$

(d. h. in einer geschlossenen Volkswirtschaft werden private Investitionen und das Budgetdefizit durch private Ersparnisse finanziert).

Schließlich, mit der das Sozialprodukt beschreibenden Gleichung (6.10) ergibt sich:

$$Y = C_{pr} + I_{pr} + G = C_{pr} + S - \dot{B} + G = C_{pr} + S - (r - \delta)B + T \tag{6.27}$$

Mit Hilfe dieser Zusammenhänge erhalten wir nun die folgenden beiden Differenzialgleichungen, die die Wachstumsdynamik des Modells beschreiben:[207]

$$\dot{k}(t) = \{A[s + z(1-s) - \eta(1-\xi)] - (g_L + \delta)\}k(t) - (1-s)(1-z)(r-\delta)b(t) \tag{6.28}$$

$$\dot{b}(t) = A(\eta - z)k(t) + [(1-z)(r-\delta) - g_L]b(t) \tag{6.29}$$

wobei $b = B/L$

Betrachten wir nun das Humankapital mit diesem Modell zusammen. Die Produktion des Humankapitals wird wieder durch das Wachstum des Realkapitals finanziert und es wird angenommen, dass die Wachstumsrate des Humankapitals eine lineare Funktion der Arbeitsproduktivität und der Pro-Kopf-Staatsanleihen ist:

[207] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 3.

$$\dot{k}(t) = \{A[s + z(1-s) - \eta(1-\xi)] - (g_L + \delta) - \gamma\tau(t)\}k(t) - (1-s)(1-z)(r-\delta)b(t) \quad (6.30)$$

$$\dot{b}(t) = A(\eta - z)k(t) + [(1-z)(r-\delta) - g_L]b(t) \quad (6.29)$$

und

$$\dot{\tau}(t) = [-\alpha + \beta A k(t) + \Theta b(t)]\tau(t) \quad (6.31)$$

Die Gleichgewichtslösung dieses Systems von drei Differenzialgleichungen ist $(k^{***}, b^{***}, \tau^{***})$ mit

$$k^{***} = \frac{\alpha[(1-z)(r-\delta) - g_L]}{\beta A[(1-z)(r-\delta) - g_L] - A(\eta - z)\Theta} = \frac{\alpha}{\beta A - \frac{A(\eta - z)\Theta}{(1-z)(r-\delta) - g_L}} \quad (6.32)$$

$$b^{***} = \frac{-\alpha A(\eta - z)}{\beta A[(1-z)(r-\delta) - g_L] - A(\eta - z)\Theta} \quad (6.33)$$

und

$$\tau^{***} = \frac{A[s + z(1-s) - \eta(1-\xi)] - (g_L + \delta)}{\gamma} + \frac{[(1-s)(1-z)(r-\delta)A(\eta - z)]}{\gamma[(1-z)(r-\delta) - g_L]} \quad (6.34)$$

Wenn wir die Gleichgewichtslösungen k^{***} und τ^{***} in (6.32) und (6.34) mit den Gleichgewichtslösungen k^{**} und τ^{**} in (6.20) und (6.21) des erweiterten Realkapital-Humankapital-Modells mit ausgeglichenem Staatshaushalt vergleichen, ist im Falle des unausgeglichenen Haushalts eine höhere Pro-Kopf-Realkapital k^{***} und Humankapital τ^{***} Gleichgewichtslösung wünschenswert.

Die Bedingung $k^{***} > k^{**}$ ist erfüllt, wenn

$$g_L < (1-z)(r-\delta) \quad (6.35)^{208}$$

Dies bedeutet, dass die Bedingung für die Erhöhung des Gleichgewichts-Pro-Kopf-Realkapitals, wenn das Budget unausgeglichen ist, empfindlich von der Veränderung

[208] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 3.

der Wachstumsrate der Bevölkerung abhängt. Das plötzliche Bevölkerungswachstum wird Bedingung (6.35) offensichtlich gefährden, aber sie kann wieder durch die Senkung des Steuersatzes erfüllt sein:

$$z < \frac{r - \delta - g_L}{r - \delta} \tag{6.36}$$

Um ein höheres Humankapital ($\tau^{***} > \tau^{**}$) zu erhalten, muss eine weitere Bedingung erfüllt sein, die den Investitionsausgabenanteil der Regierung betrifft:

$$\frac{s(1-z)(r-\delta) - g_L}{(1-z)(r-\delta) - g_L} < \xi \tag{6.37}$$[209]

Wenn also der Steuersatz (z) sinkt und deshalb die Staatseinnahmen auch abnehmen, aber ein gewisser öffentlicher Investitionsausgabenanteil von der Regierung gewährleistet wird, nimmt das Humankapital zu. Die Regierung hat dementsprechend wenig Spielraum zum Manövrieren, wenn der Haushalt nicht ausgeglichen ist.

Mit einer schematischeren Schreibweise sieht das System der drei Differenzialgleichungen (6.29)-(6.31) folgendermaßen aus:

$$\dot{k}(t) = \{a_1 - \gamma\tau(t)\}k(t) - a_2 b(t) \tag{6.38}$$

$$\dot{b}(t) = a_3 k(t) + a_4 b(t) \tag{6.39}$$

und

$$\dot{\tau}(t) = \left[-\alpha + a_5 k(t) + \Theta b(t)\right]\tau(t) \tag{6.40}$$

wobei ersichtlich ist, dass weder dieses System ein dreidimensionales Lotka-Volterra-Modell darstellt, noch eines seiner Subsysteme ein (zweidimensionales) Lotka-Volterra-Modell ist.

[209] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 3.

Ohne die konkrete Analyse des obigen Modells im Einzelnen durchzuführen soll bemerkt werden, dass allein die Tatsache, dass der Staatshaushalt eventuell unausgeglichen sein kann, den Rahmen des Lotka-Volterra-Modells zerstört.

6.3. Berücksichtigung der zeitlichen Verzögerung

In diesem Abschnitt wird die Rolle der zeitlichen Verzögerung in den Lotka-Volterra-Modellen untersucht. Ein Verzögerungsterm wird in eine der Differenzialgleichungen eingefügt (zuerst in eine des klassischen Lotka-Volterra-Modells, dann des Goodwin-Modells) und Stabilitätseigenschaften werden analysiert.

Sowohl in ökologischen als auch in ökonomischen Modellen wird oft angenommen, dass der Wert einer Variablen zum Zeitpunkt t von den aktuellen und von den vergangenen Werten von anderen Variablen abhängt.[210] Um mehr an die Realität heranzukommen, werden Verzögerungseffekte bei der Analyse dynamischer Systeme berücksichtigt.

6.3.1 Das Lotka-Volterra-Modell mit zeitlicher Verzögerung

Obwohl es akzeptabel ist, dass die Größe der Räuberpopulation eine sofortige Wirkung auf die Wachstumsrate der Beute hat, hängt die gegenwärtige Wachstumsrate des Räubers nicht nur von der gegenwärtigen Größe der Beute, sondern auch von den Größen, die in der Vergangenheit vorhanden waren (z. B. während der Trächtigkeit). Aus diesem Grund wird ein Verzögerungsterm in die Differenzialgleichung des Räubers eingefügt. Dieser Verzögerungseffekt der Vergangenheit oder, genauer gesagt, die Erhöhung dieser Verzögerung beeinflusst das Verhalten des Systems.

Zunächst wird das klassische zweidimensionale Lotka-Volterra-Modell (2.1)-(2.2) betrachtet, aber es wird berücksichtigt, dass die gegenwärtige Wachstumsrate des Räubers von der Größe der Beute in der Vergangenheit abhängt. Eine stetige

[210] Vgl. z. B. Farkas (2001), Chiarella (1990).

Gewichtsfunktion *G* wird eingeführt, die auf Momente in der Vergangenheit zurückgreift. Diese Gewichtsfunktion erfüllt die folgenden Bedingungen:

$$G(s) \geq 0, \qquad s \in (0, \infty)$$
$$\int_0^\infty G(s)ds = 1 \tag{6.41}$$ [211]

und $x(t)$ wird in der zweiten Gleichung des Lotka-Volterra-Modells durch seinen gewichteten Durchschnitt über die Vergangenheit ersetzt:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)G(t-\tau)d\tau \tag{6.42}$$ [212]

Auf diese Weise erhalten wir das Verzögerungssystem:

$$\dot{x} = a \cdot x(t) - b \cdot x(t) \cdot y(t) \tag{2.1}$$ [213]

$$\dot{y}(t) = -d \cdot y(t) + c \cdot y(t) \cdot \int_{-\infty}^{t} x(\tau)G(t-\tau)d\tau \tag{6.43}$$

Hier wird angenommen, dass die Verzögerung kontinuierlich ist. Dies bedeutet, dass die Größe der Beute nicht nur in einem einzigen Zeitpunkt in der Vergangenheit einen Einfluss auf die aktuelle Wachstumsrate des Räubers hat, sondern durch die ganze Vergangenheit hindurch (oder zumindest in den Zeitintervallen, wo das Gewichtsfunktion *G* von Null verschieden war).

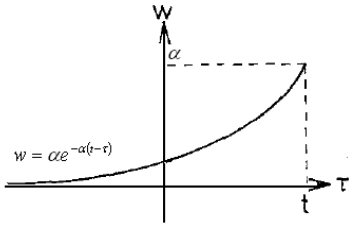
In der Literatur[214] nimmt man meist an, dass die Gewichtsfunktion exponentiell sinkt:[215]

$$G(s) = \alpha e^{-\alpha s}, \qquad \alpha > 0 \tag{6.44}$$

[211] Farkas (2001), S. 49.
[212] Farkas (2001), S. 49.
[213] mit etwas geänderter Schreibweise.
[214] Z. B. Farkas (2001), S. 50, Gandolfo (2005), S. 163.
[215] Diese Funktion erfüllt die Bedingungen in (6.41).

wobei α der Anpassungsfaktor ist. Dies bedeutet, dass Momente in der Nähe der Gegenwart (*t*) am stärksten gewichtet sind, und wenn wir frühere Zeitpunkte betrachten, ist das Gewicht exponentiell abnehmend (vgl. Abbildung 6.2).

Abbildung 6.2: Gewichtsfunktion



Quelle: Farkas (2001), S. 50.

An der Abbildung 6.2 erkennt man leicht, dass je kleiner α ist, desto wichtiger ist der Einfluss der Vergangenheit, und diese Verzögerung nimmt mit der Zunahme des Parameters α ab. Wenn α bis unendlich geht, geht $1/\alpha$, die als mittlere Zeitverzögerung interpretiert werden kann, gegen Null und die Anpassung erfolgt unverzüglich.

Gleichungen (2.1) und (6.43) bilden ein Integro-Differenzialgleichungssystem mit kontinuierlicher unendlicher Verzögerung. Es kann gezeigt werden, dass im Falle einer Gewichtsfunktion – wie in Gleichung (6.44) – dieses System im Wesentlichen äquivalent mit dem folgenden dreidimensionalen System gewöhnlicher Differenzialgleichungen ist:[216]

$$\dot{x} = a \cdot x - b \cdot x \cdot y \tag{2.1}$$

$$\dot{y} = -d \cdot y + c \cdot y \cdot z \tag{6.45}$$

$$\dot{z} = \alpha \cdot (x - z) \tag{6.46}$$

[216] wobei man die letzte Gleichung (6.46) durch einfache Differenzierung erhält.
$z(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) G(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ aus der Gleichung (6.43) ist mit $\dot{z}(t) = \alpha[x(t) - z(t)]$ äquivalent.
Vgl. z. B. Gandolfo (2005), S. 163f.

Dieses dreidimensionale System hat zwei Gleichgewichtspunkte, den trivialen $E_1(x,y,z)=(0,0,0)$ und

$$E_2(x,y,z)=\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b},\frac{d}{c}\right) \tag{6.47}$$

Vergleicht man diesen letzteren mit der Gleichgewichtslösung des klassischen zweidimensionalen Lotka-Volterra-Modells, kann man sofort sehen, dass die Gleichgewichtslösung von x^* und y^* unverändert blieb.

Um die Stabilitätseigenschaften dieses nicht trivialen Gleichgewichtspunktes zu untersuchen, müssen wir die Jacobi-Matrix des dreidimensionalen Systems im Gleichgewichtspunkt betrachten (x^*,y^*,z^*):

$$\mathbf{J}(x^*,y^*,z^*)=\begin{bmatrix} 0 & -b\frac{d}{c} & 0 \\ 0 & 0 & c\frac{a}{b} \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

Dies führt zum folgenden charakteristischen Polynom:

$$\frac{1}{\alpha}\lambda^3+\lambda^2+ad=0 \tag{6.49}$$ [217]

Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind alle strikt positiv. Durch die Anwendung des Routh-Hurwicz Stabilitätskriteriums[218] erhalten wir:

---

[217] Es lohnt sich darauf hinzuweisen, dass sich die charakteristische Gleichung des dreidimensionalen Systems (2.1), (6.45) und (6.46) im nicht verzögerten Modell, d. h. wenn $1/\alpha$ gegen Null geht, auf die quadratische Gleichung des ursprünglichen zweidimensionalen Lotka-Volterra-Modells mit den Wurzeln $\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{ad}$ reduziert, die geschlossenen Lösungskurven des ursprünglichen Lotka-Volterra-Modells werden also wiedergegeben.

[218] Das Vorhandensein von positiven reellen Wurzeln kann aufgrund der Tatsache ausgeschlossen werden, dass alle Nicht-Null-Koeffizienten in der charakteristischen Gleichung das gleiche Vorzeichen haben. Die Bedingung $a_3\neq 0$ schließt das Vorhandensein von Wurzeln mit Realteil gleich Null aus.

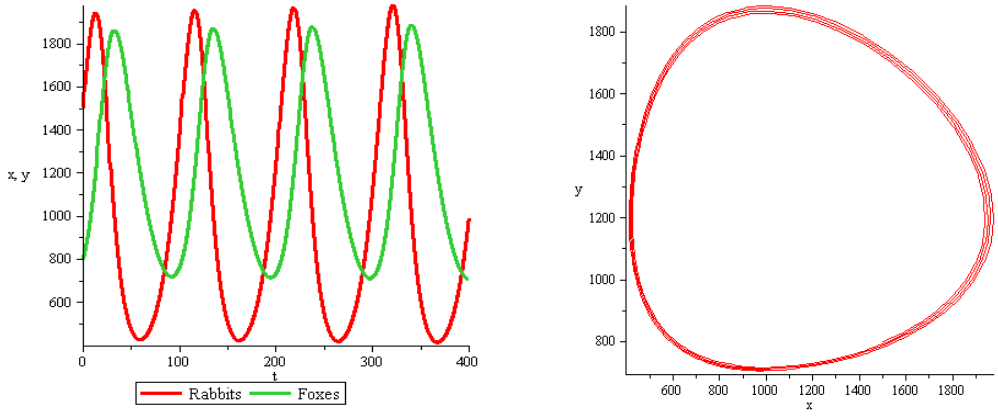
$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = -\frac{ad}{\alpha} < 0 \tag{6.50}$$

was so viel bedeutet, dass der Gleichgewichtspunkt E_2 immer lokal **instabil** ist.

Dies zeigt, dass der Effekt der Zeitverzögerung auf das positive Gleichgewicht des Lotka-Volterra-Modells – zumindest lokal – deutlich destabilisierend ist. Dies kann inhaltlich so erklärt werden, dass die gegenwärtigen Entscheidungen unter Berücksichtigung der Zeitverzögerung einem vorherigen Zustand des Modells angepasst werden. Zwischen dem vorherigen und dem aktuellen Zustand des Modells hat sich aber die Situation geändert. Das heißt, je größer die Zeitverzögerung ist, desto mehr wird ein Zustand des Modells als Grundlage für die gegenwärtige Entscheidungsfindung gemacht, der immer weniger der gegenwärtigen Situation ähnlich ist.

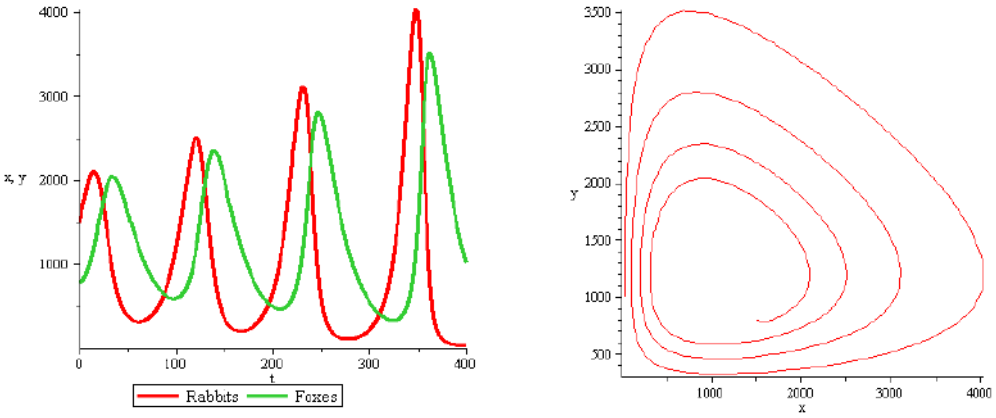
Um einen genaueren Einblick in die Dynamik des dreidimensionalen Lotka-Volterra-Systems zu erhalten, wurde das Gleichungssystem (2.1), (6.45) und (6.46) mit dem Differenzialgleichungstool Maple numerisch gelöst (simuliert) und grafisch dargestellt. Zwei typische Zeitpfade des Modells werden in den Abbildungen 6.3 und 6.4 gezeigt: einer, wenn α groß ist (die Vergangenheit hat weniger Gewicht) und einer, wenn α klein ist (die Vergangenheit hat mehr Gewicht).

Abbildung 6.3: Räuber-Beute-Interaktion im Zeitverzögerungsmodell mit großem Anpassungsfaktor α



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 6.4: Räuber-Beute-Interaktion im Zeitverzögerungsmodell mit kleinem Anpassungsfaktor α



Quelle: Eigene Darstellung

Die Grafiken zeigen die destabilisierende Wirkung der Zeitverzögerung bezüglich der Zeitpfade der Räuber- und Beutepopulation.

6.3.2 Zeitliche Verzögerung im Goodwin-Modell

Eine Verzögerung kann auch ins Goodwin-Modell eingeführt werden, insbesondere in seinen Lohnbildungsmechanismus. Wie in der Literatur betont wird,[219] passt sich die Lohnquote träge ans Ungleichgewicht am Arbeitsmarkt an. Es ist bekannt, dass die Lohnquoten in Zeiten der Rezession des Wachstumszyklus trotz wachsender Arbeitslosigkeit weiterhin für eine Weile steigen und sie erst später zu fallen beginnen. Ihr niedrigster Wert wird erreicht, wenn die Wirtschaft bereits in einer Aufschwungphase ist.

In seinem Modell ist Goodwin davon ausgegangen, dass die Wachstumsrate des Reallohnsatzes eine positive Funktion der Beschäftigungsquote ist:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\gamma_1 + \gamma_2 v(t) \tag{3.2}$$

Diese Gleichung wurde von Chiarella unter der Annahme verallgemeinert, dass es eine zeitliche Verzögerung in der Reaktion der Löhne auf Veränderungen der Beschäftigung

[219] Z. B. Bródy/Farkas (1987); Chiarella (1990).

gibt oder, genauer gesagt, die Wachstumsrate des Reallohnsatzes ($\dot{w}(t)/w(t)$) eine positive Funktion eines gewichteten Durchschnitts der Beschäftigungsquote über die vergangenen Perioden ist.[220] Es ist realistischer anzunehmen, dass Veränderungen in den Löhnen, die durch Veränderungen in der Beschäftigung verursacht worden sind, nicht unmittelbar erfolgen. Wenn Tarifverträge bestehen, werden Veränderungen in der Beschäftigungsquote über die vergangenen Perioden berücksichtigt. Diese Verzögerung kann berücksichtigt werden, wenn wir den aktuellen Wert der Beschäftigungsquote (v) in (3.2) durch seinen gewichteten Durchschnitt über die Periode $(-\infty, t]$ ersetzen, d.h. wir ersetzen (3.2) durch

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\gamma_1 + \gamma_2 h(t) \qquad (6.51)^{221}$$

wobei

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha e^{-\alpha(t-\tau)} v(\tau) d\tau \qquad (6.52)^{222}$$

So ist $h(t)$ ein kontinuierlich verteilter gewichteter Durchschnitt aller Beschäftigungsquoten in der Vergangenheit, wobei die Gewichtsfunktion $h(t)$ exponentiell fallend ist.

Das erweiterte Goodwin-Modell besteht nun aus den folgenden drei Differenzialgleichungen:

$$\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} = \left(\frac{1}{k} - g_A - g_L\right) - \frac{1}{k} u(t) \qquad (3.3)^{223}$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{u(t)} = -(\gamma_1 + g_A) + \gamma_2 h(t) \qquad (6.53)$$

$$\dot{h}(t) = \alpha[v(t) - h(t)] \qquad (6.54)$$

[220] Vgl. Chiarella (1990), S. 71.
[221] Vgl. Chiarella (1990), S. 71. mit etwas anderen Bezeichnungen.
[222] Vgl. Chiarella (1990), S. 71. mit etwas anderen Bezeichnungen.
[223] mit etwas geänderter Schreibweise.

Wie bei der Analyse des äquivalenten Lotka-Volterra-Modells gezeigt wurde, bewahrt das System (3.3), (6.53) und (6.54) die Gleichgewichtspunkte des grundlegenden zweidimensionalen Goodwin-Modells. Auf der anderen Seite macht die Einführung der zeitlichen Verzögerung in die Phillips-Gleichung den Goodwin-Wachstumszyklus (lokal) instabil. Mit anderen Worten hängt die Lage des Gleichgewichtspunktes nicht von der Verzögerung ab, aber seine Stabilität wird eindeutig beeinflusst.

Die Gleichgewichtslösungen $\left(v^*, u^*\right)$ sind dieselben, wie diejenigen des ursprünglichen Goodwin-Modells (3.5) und (3.6), wobei im Falle der Lohnquote u^* die Ersparnisse der Kapitaleigner ausreichend sind, um eine bestimmte Beschäftigungsquote (v^*) zu gewährleisten. Im Falle von anderen Lösungen oszillieren die Beschäftigungsquote und Lohnquote mit immer wachsenden Amplituden (spiralförmig nach außen verlaufende Trajektorien).

Wie vorher gezeigt worden ist, wirkt eine zeitliche Verzögerung – zumindest lokal – destabilisierend, wobei die konservativen Lotka-Volterra Schwingungen verschwinden. Je kleiner α ist (d. h. je größer $1/\alpha$ – die mittlere Verzögerung – ist), umso mehr wird das System destabilisiert.

Diese dynamischen Aspekte haben auch wirtschaftspolitische Konsequenzen. α ist ein Verhaltensparameter, der von der Wirtschaftspolitik zu beachten ist, denn er bezeichnet, wie schnell sich die über den vergangenen Zeitraum gewichteten Beschäftigungsquoten in Abhängigkeit von gegenwärtiger und durchschnittlicher Beschäftigungsquote verändert.

Die Löhne werden auf dem Arbeitsmarkt nicht der tatsächlichen Beschäftigungsquote (v), sondern den vergangenen Beschäftigungen entsprechend bestimmt. Der gewichtete Durchschnitt der Beschäftigungsquote über die vergangenen Perioden (h) ändert sich kontinuierlich (6.54) aufgrund der Differenz zwischen dem tatsächlichen Wert und dem Mittelwert der Beschäftigungsquote. Ein kleiner α-Wert bedeutet, dass diese Differenz eine geringe Auswirkung auf den Mittelwert der Beschäftigungsquote hat. Ein kleiner α-Wert bedeutet gleichzeitig, dass eine längere Verzögerung, eine längere Periode in den Lohnverhandlungen betrachtet und das System schneller destabilisiert wird.

Die Wahl von α hat durch den gewichteten Durchschnitt aller vergangenen Beschäftigungsquoten Einfluss auf die Wachstumsrate der Lohnquote im Sozialprodukt und dementsprechend auf die Verteilung von Kapital und Arbeit. Ihr Verhältnis kann durch eine angemessene Gewichtung verändert werden. Laut Modellannahmen, abgesehen von den Löhnen, wird das ganze (Rest-) Sozialprodukt automatisch investiert. Auf diese Weise wäre die Regierung im Stande, ein Wirtschaftsförderungsprogramm zu starten.

Die Frage kann entstehen, ob es möglich ist, das System so zu stabilisieren, dass es (asymptotisch) stabiles Verhalten zeigt. Ist es im Goodwin-Modell mit zeitlicher Verzögerung möglich, dass persistentes periodisches Verhalten erscheint, wenn außer der Zeitverzögerung auch andere Mechanismen in Betracht gezogen werden? Welche Veränderungen würde dies zur mathematischen Struktur des Modells bedeuten?

6.3.3 Weitere Erweiterungen

In der Theorie der zeitlichen Verzögerungen ist es bekannt, dass die Kombination gegensätzlicher Kräfte Grenzzyklen (vgl. Abbildung 3.3) erzeugen kann (ein Mechanismus ist völlig stabilisierend, der andere ist völlig destabilisierend).[224]

Grenzzyklen sind nichtlineare Phänomene[225], sie sind z. B. Beispiele dafür, wie die Wechselwirkung von Wirtschaftskräften ein System dazu bringen kann, seinen beliebigen Zustand zu verlassen und zu beginnen, kontinuierlich und völlig regulär zu schwingen[226].

Einige Beispiele können in der Literatur gefunden werden, wo die gemeinsame Rolle von Zeitverzögerungen und anderen relevanten ökonomischen Annahmen im Rahmen des klassischen Wachstumszyklus von Goodwin untersucht werden, wobei persistente periodische Schwingungen (Grenzzyklen) erscheinen. Diese Grenzzyklen entstehen oft

[224] Z. B. Fanti/Manfredi (1997). Wie sie feststellen, braucht die Erzeugung persistenter Schwingungen eine dynamische Ausgewogenheit zwischen Verzögerungen (nicht zu lange) und (quadratischen) Dämpfungseffekten. Große Verzögerungen destabilisieren im Allgemeinen das System.
[225] Vgl. Kapitel 3.2.2.
[226] Manfredi/Fanti (2004).

aus Hopf-Bifurkationen[227] und wie oft betont wird, ist riesige algebraische Komplexität notwendig, um die Stabilitätseigenschaften zu ermitteln.

Solch ein Modell wurde von Bródy und Farkas (1987) vorgeschlagen, die einen verzögerten Phillips-Mechanismus (d. h. eine zeitliche Verzögerung in der Lohn-Reaktion auf Veränderungen der Beschäftigung) und eine logistische Annahme[228] in die Dynamik der Beschäftigung einfügen. Das dreidimensionale System hat die Form:

$$\dot{v} = a_1(1-v)v - b_1uv \tag{6.55}$$

$$\dot{u} = -d_1u + c_1uh \tag{6.56}$$

$$\dot{h} = \alpha(v-h) \tag{6.57}$$

wobei

$$a_1 = \frac{1}{k} - g_A - g_L \qquad b_1 = \frac{1}{k} \qquad c_1 = \gamma_2 \qquad d_1 = \gamma_1 + g_A$$

den Gleichungen (3.3) und (3.4) entsprechend.

Das dreidimensionale System hat drei Gleichgewichtspunkte, die trivialen E_1 (v,u,h)=(0,0,0) und E_2 (v,u,h)=(1,0,1) mit Abwesenheit der Räuber, sowie

$$E_3(v,u,h) = \left(\frac{d_1}{c_1}, \left(1-\frac{d_1}{c_1}\right)\frac{a_1}{b_1}, \frac{d_1}{c_1}\right) \tag{6.58}$$

der im positiven Oktanten von v, u, h ist, wenn

$$c_1 > d_1 \tag{6.59}$$

[227] Zu Hopf-Bifurkation vgl. Hirsch/Smale (1974), S. 227.

[228] Hinter dieser Annahme steht die Überlegung, dass jede Population (in unserem Falle die Beutepopulation) in eine gesättigte Phase hineinwächst, aus der sie nicht mehr weiter wachsen kann, denn das ökologische Habitat kann eine größere Population nicht mehr ernähren.

Ähnlich wie beim vorher untersuchten Goodwin Modell mit zeitlicher Verzögerung, hängt die Lage des Gleichgewichtspunktes nicht von der Verzögerung $\mu = \frac{1}{\alpha}$ ab, aber seine Stabilität wird dadurch beeinflusst.

Das Stabilitätsproblem dieses Gleichgewichtspunktes ist ein komplexes Problem. Durch eine verhältnismäßig komplizierte Berechnung, wie in der Literatur dargestellt wird,[229] können die folgenden Ergebnisse erzielt werden. Nur diese Ergebnisse werden hier zusammengefasst:

Wenn neben (6.59)

auch

$$c_1(c_1 - d_1) - a_1 d_1 < 0 \tag{6.60}$$

erfüllt ist, dann ist das Gleichgewicht (6.58) asymptotisch stabil, unabhängig davon, wie groß die Verzögerung ist.

Wenn

$$c_1(c_1 - d_1) - a_1 d_1 > 0 \tag{6.61}$$

(was auch $c_1 > d_1$ impliziert),
dann ist das Gleichgewicht stabil bei geringen Verzögerungen, und instabil bei großen Verzögerungen.

Insbesondere, wenn neben (6.61)

$$\mu\left(c_1 - d_1 - \frac{a_1 d_1}{c_1}\right) < 1 \tag{6.62}$$

auch gilt, dann ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil.

Allerdings, wenn

[229] Bródy/Farkas (1987).

$$\mu\left(c_1 - d_1 - \frac{a_1 d_1}{c_1}\right) > 1 \tag{6.63}$$

dann wird das Gleichgewicht instabil sein.

Stabilität geht verloren, wenn

$$\mu\left(c_1 - d_1 - \frac{a_1 d_1}{c_1}\right) = 1 \tag{6.64}$$[230]

Dieses Beispiel der Literatur zeigt, dass die gleichzeitige Betrachtung der zeitlichen Verzögerung und einer anderen möglichen relevanten Modellannahme (das logistische Wachstum der Beute) im Rahmen des klassischen Wachstumszyklus von Goodwin zum Auftreten von anhaltenden periodischen Schwankungen (Grenzzyklen) führen kann. (Vgl. Kapitel 3.2.3 Unterschiede zwischen Samuelsons und Goodwins Modell.)

[230] Dieser Verlust der Stabilität ist eine Andronov-Hopf-Bifurkation [vgl. Anishchenko/Astakhov/Neiman et al. (2007), S. 20], und wenn $2c_1 - d_1 - \left(d_1 \frac{8a_1^2 + 9a_1 d_1 + 2d_1^2}{a_1 + 2d_1}\right)^{1/2} > 0$ erfüllt ist, variieren die beiden Variablen mit kleinen Amplituden und orbital asymptotisch stabile periodische Schwingung entsteht. Wenn die linke Seiter der obigen Ungleichung kleiner als Null ist, sind die Schwingungen instabil.

7. Empirisches Assessment eines erweiterten Goodwin-Modells

Das Goodwin-Modell sagt – wie schon erwähnt – die zyklische Oszillation der (beiden endogenen Variablen des Systems) der Lohnquote und der Beschäftigungsquote voraus. Obwohl Goodwin in seinem Modell einige vereinfachende Annahmen traf, ist es von Interesse zu untersuchen, ob, und in wie weit, auf einer qualitativen Ebene Zyklen vom Goodwin-Typ existieren.

Es wurde eine qualitative Auswertung des vorgestellten dynamischen Zusammenhangs aufgrund der zeitlichen Entwicklung der Lohnquote und der Beschäftigungsquote von einigen OECD-Ländern im Zeitraum zwischen 1990-2007[231] durchgeführt. Alle Daten stammen aus den OECD-Statistiken (Volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen, Beschäftigungs- und Arbeitsmarktstatistiken).

Die beiden Zustandsvariablen werden wie im Artikel von Harvie[232] definiert,
die Lohnquote:

$$u = \frac{\text{Arbeitnehmerentgelt}}{(\text{Arbeitnehmerentgelt} + \text{Bruttobetriebsüberschuss und Bruttoselbständigeneinkommen})}$$

und die Beschäftigungsquote :

$$v = \frac{\text{Gesamtbeschäftigung}}{\text{gesamte Erwerbsbevölkerung}}$$

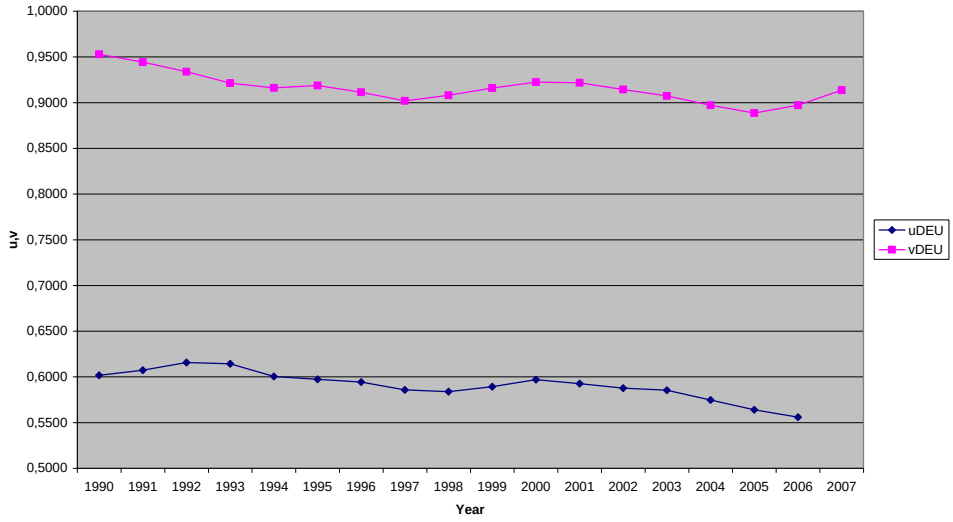
Die Zeitpfade dieser zwei Variablen in der Periode 1990-2007 für einige entwickelte OECD-Volkswirtschaften (Deutschland, die Niederlande und das Vereinigte Königreich) sowie für einige OECD Transformationsländer (Tschechien, Ungarn, Polen und die Slowakei) werden in den folgenden Abbildungen dargestellt.

Die Zeitpfade zeigen für Deutschland und Großbritannien eine zyklische Entwicklung, die stark an die von Goodwin dargestellten Graphiken erinnern. Es lässt sich eine

[231] Die Wahl des Ausgangsjahres wurde durch die Verfügbarkeit der statistischen Daten für Transformationsländer determiniert.
[232] Harvie (2000), S. 356.

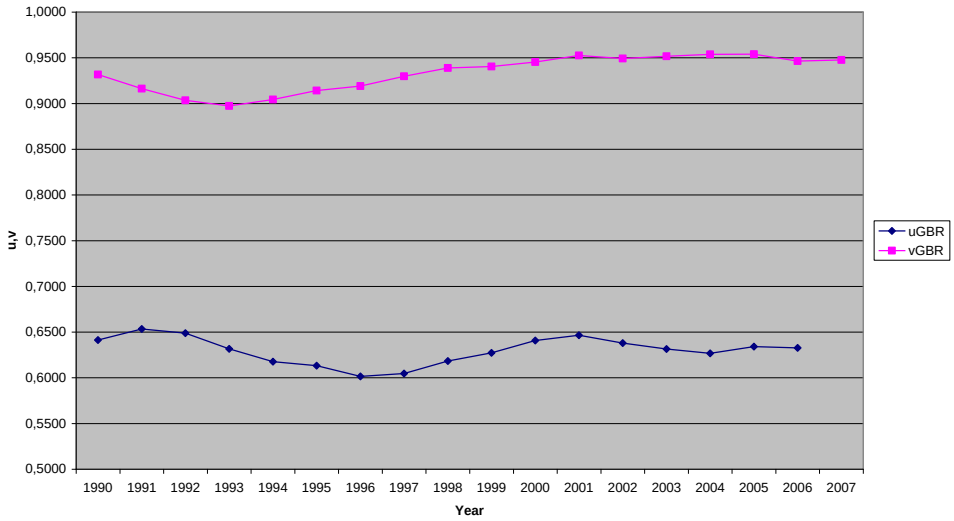
phasenverschobene zyklische Veränderung der Beschäftigungsquote und der Lohnquote beobachten. Die Periode beträgt ungefähr 8-10 Jahre.

Abbildung 7.1: *uv*-Zyklen in Deutschland



Quelle: Eigene Darstellung

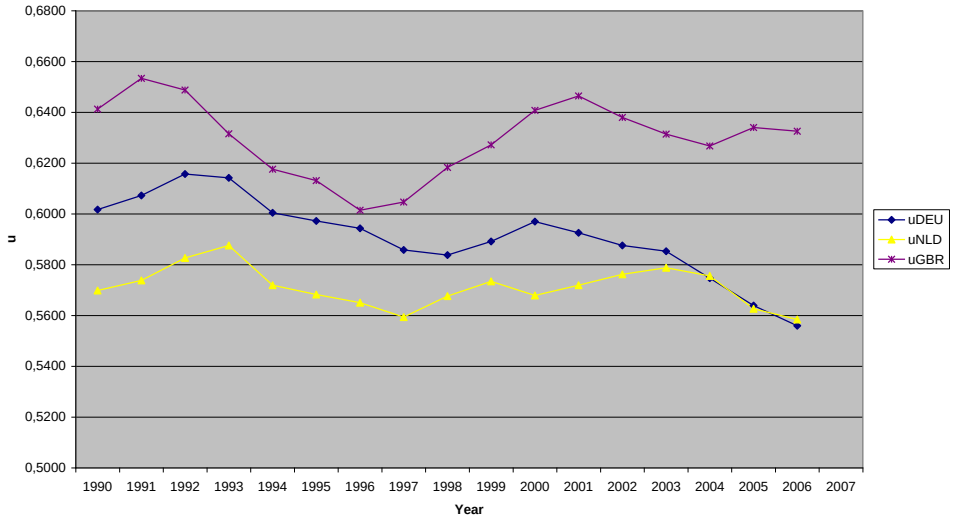
Abbildung 7.2: *uv*-Zyklen im Vereinigten Königreich



Quelle: Eigene Darstellung

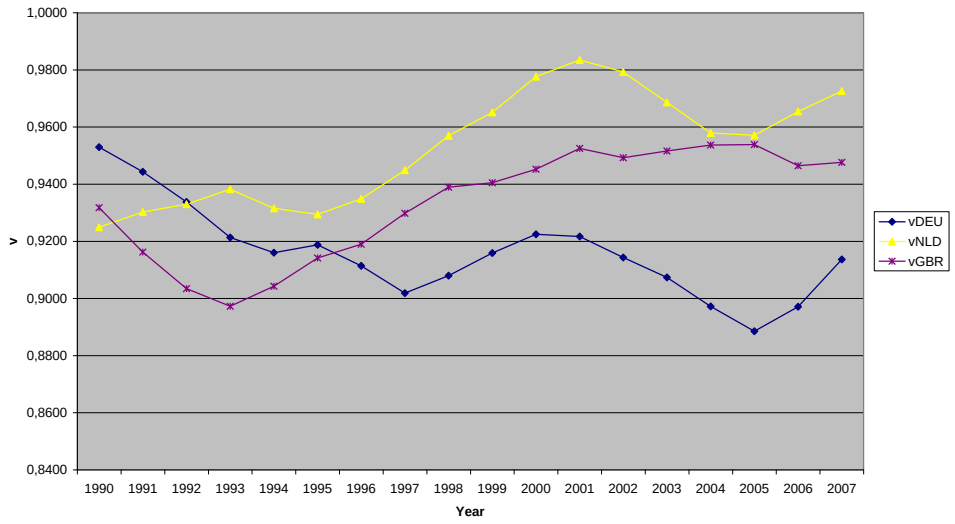
Die Graphen der Zeitpfade der Beschäftigungs- und Lohnquote jeweils von den drei entwickelten Volkswirtschaften (Deutschland, Niederlande und Vereinigtes Königreich) zeigen darüber hinaus, dass die Entwicklung dieser Variablen fast parallel und in gleichen Phasen erfolgt.

Abbildung 7.3: Lohnquote (*u*) in Deutschland, in den Niederlanden und im Vereinigten Königreich



Quelle: Eigene Darstellung

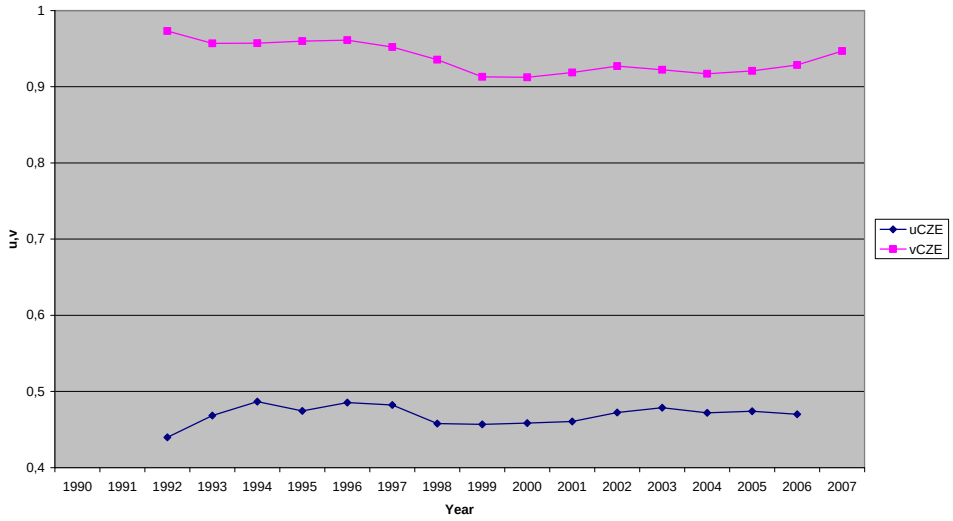
Abbildung 7.4: Beschäftigungsquote (*v*) in Deutschland, in den Niederlanden und im Vereinigten Königreich



Quelle: Eigene Darstellung

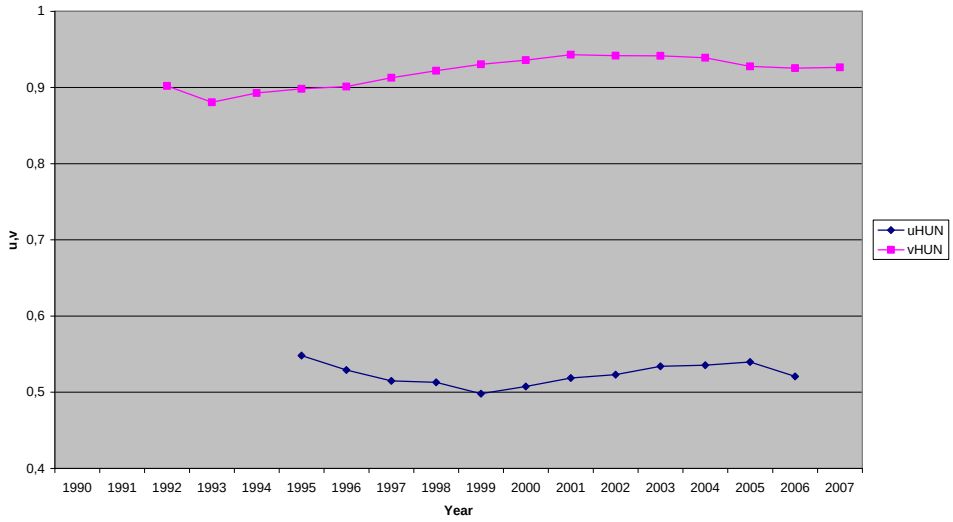
Die an Goodwin-Zyklen erinnernden Zeitpfade können auch in den Transformationsländern beobachtet werden. Die besten Beispiele sind Tschechien und Ungarn. Leider sind hier die Zeitreihen nicht lang genug, um die Dauer der Zyklen eindeutig zu ermitteln.

Abbildung 7.5: *uv*-Zyklen in Tschechien



Quelle: Eigene Darstellung

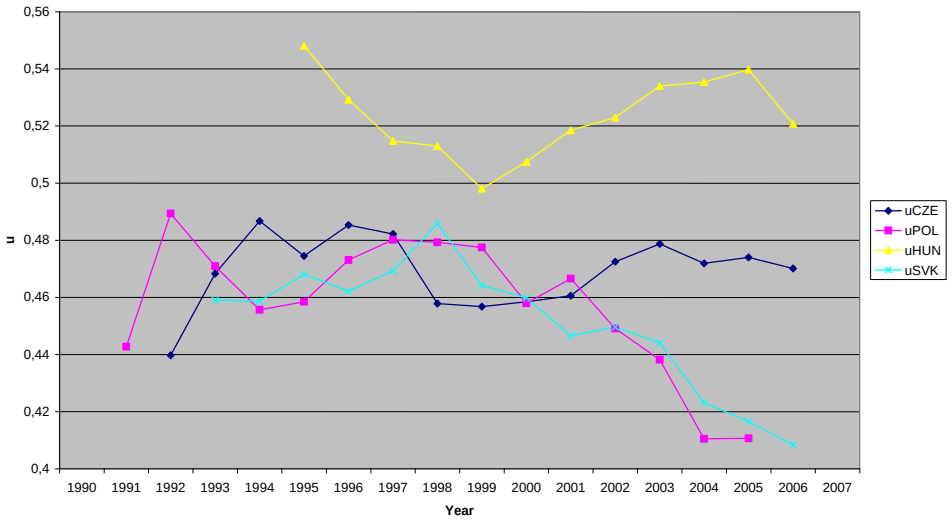
Abbildung 7.6: *uv*-Zyklen in Ungarn



Quelle: Eigene Darstellung

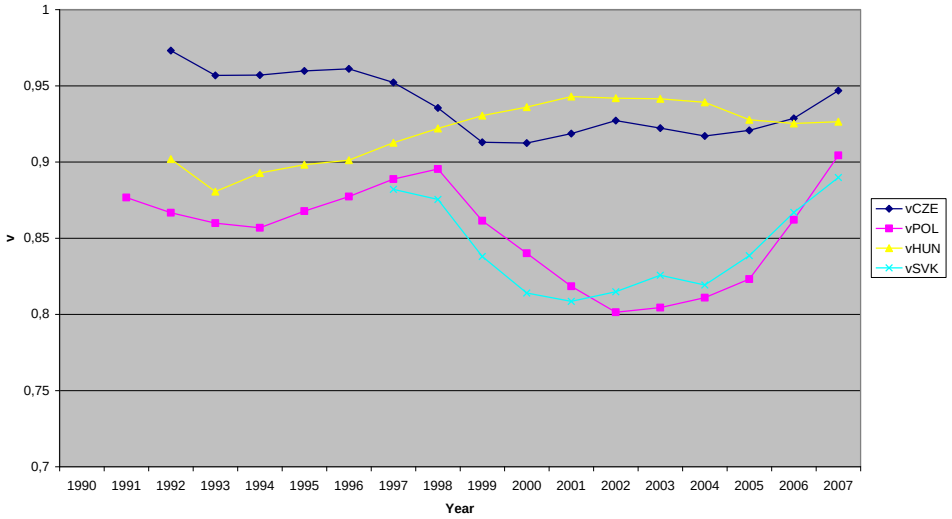
Die Entwicklung der Variablen der Beschäftigungs- und Lohnquote in den vier untersuchten Transformationsländern (Tschechien, Ungarn, Polen und Slowakei) verläuft nicht parallel und nicht in der gleichen Phase, wie die Diagramme der Abbildungen 7.7 und 7.8 zeigen.

Abbildung 7.7: Lohnquote (*u*) in Tschechien, Polen, Ungarn und in der Slowakei



Quelle: Eigene Darstellung

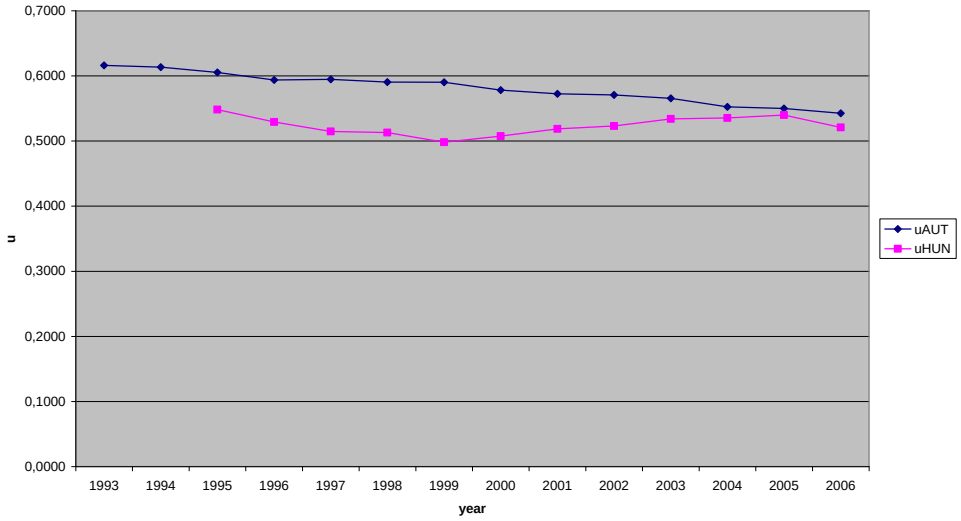
Abbildung 7.8: Beschäftigungsquote (*v*) in Tschechien, Polen, Ungarn und in der Slowakei



Quelle: Eigene Darstellung

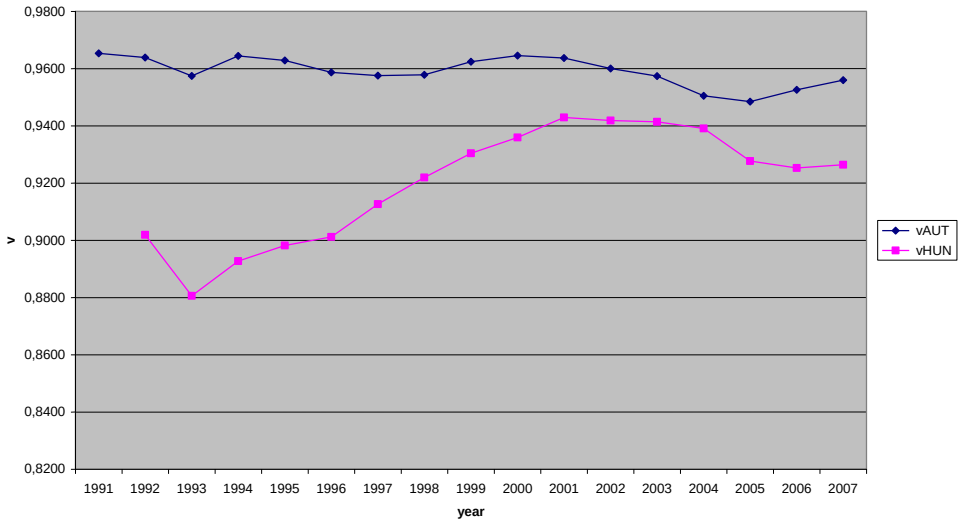
Auch die in der multiregionalen Erweiterung des Goodwin-Models (Kapitel 6.1.2) beschriebene Tendenz, dass nämlich die Unterschiede in der Lohnquote und Beschäftigungsquote zwischen den Regionen langsam verschwinden werden, scheint durch die Zeitpfade der Beschäftigungsquote und der Lohnquote des empirischen Assessments im Falle von Österreich und Ungarn – wie die Abbildungen 7.9 und 7.10 zeigen – illustriert zu werden.

Abbildung 7.9: Lohnquote (*u*) in Österreich und Ungarn



Quelle: Eigene Darstellung

Abbildung 7.10: Beschäftigungsquote (*v*) in Österreich und Ungarn



Quelle: Eigene Darstellung

8. Evolutorische Spiele

In diesem Kapitel sollen die gleichen Fragen wie in den vorangehenden Kapiteln analysiert werden, in denen die Analyse auf der aggregierten Makroebene erfolgte. Die Behandlung erfolgt hier nun im Gegensatz dazu auf der Mikroebene, somit ist der Ausgangspunkt, die Methode, die Art und Weise des Vorgehens anders.

Im folgenden Teil wird also eine andere Herangehensweise an den Problemkomplex der Lotka-Volterra-Modelle und ihrer ökonomischen Interpretationen verfolgt, und zwar die der Spieltheorie, die das *individuelle* Verhalten der Wirtschaftsakteure explizit berücksichtigt. In Anbetracht dessen müssen auch die vorher angesprochenen wirtschaftspolitischen Maßnahmen zur Stabilisierung der ökonomischen Entwicklung in neuer Weise beurteilt werden.

Hofbauer (1981) zeigte, dass zwischen den linearen Replikatorengleichungen[233] der evolutorischen Spieltheorie und den Lotka-Volterra-Gleichungen eine gewisse Analogie besteht. Aufgrund dieses Zusammenhanges werden im Weiteren die traditionellen (zweidimensionalen) Lotka-Volterra-Gleichungen (vgl. Kapitel 2) in (dreidimensionale) Replikatorengleichungen überführt, das Ergebnis auf das Realkapital-Humankapital-Modell angewendet und im Kontext der evolutorisch stabilen Strategien analysiert. Zuvor werden aber einige wichtige Merkmale des Konzeptes der Evolution vor allem im Hinblick auf die evolutorische Ökonomik sowie die wesentlichen Eigenschaften der evolutorischen Spiele, besonders in Bezug auf die Stabilität, zusammengefasst.

8.1 Evolutorische Herangehensweise und die Darstellung der Auswirkungen von Mikrointeraktionen auf die Makrostruktur[234]

Evolutionäre Ansätze findet man in verschiedenen Wissenschaften. Der Begriff Evolution und die evolutorische Herangehensweise hat auch in der Ökonomik seit den 80er-Jahren Anwendung gefunden.

[233] Auch spieldynamische Gleichungen genannt.
[234] Die folgende Zusammenfassung basiert auf Meyer (2003).

Es stellt sich die Frage: Was ist eigentlich die evolutorische Herangehensweise in der Ökonomik? Ist sie eine Methode zur Analyse, ein Funktionsmechanismus oder eventuell nur eine Annahme, wie die Axiome des rationalen Verhaltens? Es scheint – vielleicht nicht nur im Rahmen dieser Arbeit – unmöglich zu sein, diese Frage eindeutig zu beantworten. Obwohl zahlreiche Publikationen, Studien zu diesem Thema entstanden sind,[235] hat sich bis jetzt noch kein allgemein akzeptierter Standpunkt dazu herausgebildet.

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Merkmale gegeben, die die wesentlichen Bestandteile evolutionärer Systeme bzw. evolutorischer Theorien sind.

- Die Evolution ist untrennbar von der *Dynamik*, denn die Evolution ist ein Prozess. Allerdings können wir die Evolution nicht mit der zeitlichen Entwicklung eines Phänomens gleichsetzen, da die evolutionäre Dynamik zum einen dadurch gekennzeichnet ist, dass die die Art der Bewegung bestimmende Ursache nicht ausschließlich exogen sein darf, auf der anderen Seite ist der Zeithorizont des Prozesses extrem lang.
- Von Evolution kann man nur bei *ganzen, mehrere Ebenen umfassenden Systemen* sprechen, es ist also unbedingt notwendig, dass in einer bestimmten Umgebung das beobachtete Phänomen eine bestimmte innere Struktur hat, mit anderen Worten, das Ganze aus Elementen in großer Anzahl aufgebaut ist. Diese Teile, ihre Bewegung und Wechselwirkung bestimmen letztendlich die Dynamik des Systems, seine Reaktion auf die Umgebung.
- Zum Teil die große Anzahl von Elementen, zum Teil auch die zur Verfügung stehende unvollständige Information implizieren die *stochastische Natur* der inneren Dynamik; die Gesetzmäßigkeiten also, die das Verhalten der Elemente beschreiben, haben auch Zufallscharakter.
- Evolutorische Systeme sind *offen*, die Zukunft ist folglich nicht eindeutig voraussehbar. Es geht hier nicht nur darum, dass die zukünftigen Ereignisse unsicher sind, sondern es ist auch vorstellbar, dass die Möglichkeiten für weitere Entwicklungen früher noch nicht bekannt waren oder sich auch in der Gegenwart unserer Kenntnis entziehen. In diesem Sinne sind evolutorische

[235] U.a. Nelson/Winter (1982), Silverberg (1984), Okruch (2001), Dopfer/Foster/Potts (2004), Hodgson (2009).

Systeme auch, vielleicht auch im Besonderen dadurch charakterisiert, dass in ihnen „Neues“, bisher nicht bekannte Zusammenhänge, entstehen.

Die obigen Eigenschaften sind im Allgemeinen für die durch die drei Begriffe *Variabilität – Mutation – Selektion* gekennzeichnete *Darwinsche* Evolution gültig, was gleichzeitig bedeutet, dass die Evolution nicht auf der individuellen Ebene, sondern auf der Ebene der Population vonstattengeht.

Im Darwinschen System ist das Beziehungssystem auf der Mikroebene nicht deterministisch, deswegen können sich Individuen mit unterschiedlichen Merkmalen innerhalb der gleichen Population herausbilden. Darunter sind diejenigen die ‚geeignetsten‘, die den gegebenen, sich eben modifizierenden Umweltbedingungen am besten entsprechen, die sich an die sich verändernden Lebensbedingungen am besten anpassen. Jeden Augenblick gibt es also in einer gegebenen Population eine bestimmte Verteilung der Individuen mit verschiedenen Merkmalen. Je nach diesen Merkmalen zeigen die Individuen ein Verhalten, das der Umwelt auf unterschiedliche Weise entspricht, sie zeichnen sich somit durch unterschiedliche Lebensfähigkeit aus. Wenn sich die Umwelt nicht oder nur geringfügig ändert, wird jene Gruppe in der Population mit der Zeit dominieren, die diesen Umweltbedingungen am besten entspricht. Eine plötzliche oder u. U. auch radikale Änderung in den Umweltbedingungen wird eine andere Teilpopulation in eine vorteilhaftere Situation bringen, angenommen, dass die Umwelt jetzt wieder für eine gewisse Zeit konstant bleibt. Dadurch ändert sich aber auch die Population als Ganzes, da sie jetzt in erster Linie durch die Individuen der den geänderten Bedingungen besser entsprechenden Gruppe charakterisiert wird. Die Ursache für die Umwandlung der Population ist also in entscheidendem Maße die in der Umgebung stattfindende Änderung, was allerdings nur unter der Voraussetzung interpretiert werden kann, dass es eine Vielzahl verschiedener Individuen in der Population gibt. Eine andere Ursache kann das Auftreten von Mutanten, also von bisher nicht existierenden Individuen in der Population sein. Das kann dazu führen, dass die neuen Individuen unter den gegebenen Umweltbedingungen bessere oder auch schlechtere Chancen zum Überleben haben. Auch dies verändert die Zusammensetzung der Population, ist also ein evolutorischer Prozess im gesprochenen Sinne.

Wie aus den obigen Ausführungen hervorgeht, ist nicht nur die auf der Mikroebene ständig stattfindende Bewegung der entscheidende Faktor. Mindestens im gleichen Maße ist die relative Stabilität der Umgebung erforderlich, da ein für die Entwicklung der ganzen Population unentbehrlicher maßgebender Anhaltspunkt, woran sie sich anpasst, nur dadurch gegeben ist. Der Fakt, dass sich die Umgebung um Größenordnungen langsamer als die Population darin ändert, gibt Rahmenbedingungen für die Evolution an, und führt dazu, dass die unkontrollierte Bewegung auf der Mikroebene nicht zur Entstehung vom dauerhaften Chaos auf der Makroebene führt.

Bei diesem Gedankengang geht es also um eine Erklärung der Änderungen auf der Makroebene mit Hilfe von auf der Mikroebene stattfindenden Vorgängen.

Wenn man die vorherigen Gedanken auf die Ökonomie anwendet, bedeutet dies, dass für eine evolutorische Herangehensweise die Berücksichtigung sowohl der mikroökonomischen als auch der makroökonomischen Ebene notwendig ist. Auf der Mikroebene passiert etwas, was nicht genau vorhersehbar ist, bzw. worüber wir nicht genügende Kenntnisse haben, trotzdem determiniert es die relativ stabile Makroebene in ihrer verhältnismäßig langsamen Entwicklung. Eine modifizierte makroökonomische Situation wird also zumeist als Ergebnis eines mikroökonomischen Langzeitprozesses zustande kommen, kann allerdings auch durch einschneidende plötzlich auftretende Ereignisse (Naturkatastrophen, Kriege) hervorgerufen werden.

Bei vielen, vielleicht sogar bei allen makroökonomischen Prozessen ist gerade dieser Zusammenhang der Schlüssel zum Verstehen, z. B. bei Migrationsprozessen oder bei Innovationsprozessen.

8.2 Grundkonzepte der evolutorischen Spieltheorie

Bei der Erforschung grundlegender Fragen der biologischen Evolution fanden auch spieltheoretische Konzepte Anwendung, um die Herausbildung spezieller Verhaltensweisen in Tierpopulationen zu erklären. Die daraus entstandene *evolutorische*

Spieltheorie, die ursprünglich von Biologen und Mathematikern entwickelt wurde,[236] fand später auch bei der Behandlung sozialwissenschaftlicher, darunter ökonomischer Probleme Anwendung.[237]

Die evolutorische Spieltheorie geht davon aus, dass Individuen ihre Strategie nicht im Bewusstsein einer gegebenen Entscheidungssituation wählen, sondern auf ein bestimmtes *Verhalten* (auf eine Strategie) *genetisch vorprogrammiert* sind.[238]

Die Gesamtpopulation besteht also aus Teilpopulationen, die sich hinsichtlich ihres Verhaltens voneinander unterscheiden; es muss also mindestens zwei Teilpopulationen mit unterschiedlichen Verhaltensweisen geben. Nimmt man als Beispiel die Population Menschheit, dann ist es klar, dass sie sich aus den Teilpopulationen „Mann" und „Frau" zusammensetzt.

Die Individuen der verschieden Teilpopulationen treffen nun zufällig, paarweise aufeinander und verhalten sich in diesem Spiel gemäß ihrem geerbten Programm. Individuen, die aus dem Zusammentreffen eine höhere Auszahlung im Sinne einer höheren *Fitness* – im Allgemeinen interpretiert als eine größere Fähigkeit zum Zeugen von Nachkommen, die der eigenen Teilpopulationen angehören – erhalten, wird somit eine relativ höhere Reproduktionsfähigkeit zugeschrieben und sie vererben ihre Strategie im beschriebenen Sinne an die Nachkommen. Vererben bedeutet also das Weitergeben des eigenen Verhaltens an die Nachkommen. Der Anteil der Teilpopulation, deren Individuen eine höhere Auszahlung erzielen, bzw. ihre Verhaltensweise effizienter vererben, steigt also. In unserem vorherigen Beispiel der Menschheit werden Nachkommen nur durch die Interaktion zwischen Individuen verschiedenen Geschlechts geboren, wobei 52 % der Neugeborenen männlich sind. D.h. die Individuen der männlichen Teilpopulationen vererben ihre genethischen Eigenschaften effizienter, als die weiblichen Teilpopulationen, die ihre Eigenschaften nur zu 48 % vererben.

[236] Smith/Price (1973) und Smith (1982).
[237] Vgl. Söllner (2015), S. 267.
[238] Vgl. Riechmann (2002), S. 150.

Die wichtigste Frage der evolutorischen Spieltheorie ist, welche Verhaltensweisen langfristig auf der Ebene der Population *überleben, bzw. nicht untergehen* werden. Wenn aus den Interaktionen zwischen Individuen verschiedenen Geschlechts mit größerer Wahrscheinlichkeit Jungen geboren werden, heißt das in unserem Beispiel, dass früher oder später ausschließlich die männliche Teilpopulation existieren wird?

Nein, da die Auswahl der am Spiel beteiligten Individuen zufällig geschieht, bedeutet das effiziente Vererben der Eigenschaften zugleich eine steigende Wahrscheinlichkeit, dass ein Individuum mit dieser Verhaltensweise auf ein Individuum gleichen Typs trifft, also keine Nachkommen gezeugt werden.

Der Vorteil aus der effizienteren Vererbung der Eigenschaften wird also zu einem Nachteil beim Zusammentreffen von Individuen unterschiedlichen Geschlechts. Für die weiblichen Individuen es ist umgekehrt. Das Sinken des Anteils der weiblichen Teilpopulation – also der Nachteil bei der Vererbung der eigenen genetischen Eigenschaften – wird zu einem Vorteil beim Zusammentreffen mit einem Individuum des anderen Geschlechts. Es ist also zu erwarten, dass sich im Endeffekt ein stabiles Verhältnis der Teilpopulationen einstellen wird.

Die zuvor formulierten Zusammenhänge können folgendermaßen formalisiert werden:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = a_i(x(t)) - \bar{a}(x(t)) \qquad \text{für } t \geq 0 \qquad (8.1)^{239}$$

wobei die linke Seite der Gleichung die Wachstumsrate des Populationsanteils x_i zum Zeitpunkt t ist, die ein Maß für den evolutionären Erfolg von Individuen vom Typ i darstellt. $a_i(x(t))$ bedeutet die erwartete Fitnessauszahlung eines Individuums der Population x zum Zeitpunkt t und $\bar{a}(x(t))$ stellt die durchschnittliche Fitness der x-Population dar, die gemäß dem Vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ aus n unterschiedlichen Gruppen besteht.[240] Diese sogenannte *Replikatorengleichung* (8.1) besagt Folgendes:

[239] Vgl. Holler/Illing (2003), S. 370.

[240] Laut Annahme sind die Anteile so standardisiert, dass $\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$ gilt. (Vgl. Holler/Illing (2003), S. 370.)

wenn die Fitness der Individuen i größer ist als die durchschnittliche Fitness der Population, also wenn $a_i(x(t)) - \bar{a}(x(t)) > \mathbf{0}$, dann gilt $\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} > \mathbf{0}$. In diesem Fall nimmt der Populationsanteil x_i zu. Im entgegengesetzten Fall, wenn also die Fitness der Individuen i kleiner ist als die durchschnittliche Fitness der Population, also wenn $a_i(x(t)) - \bar{a}(x(t)) < \mathbf{0}$, dann gilt $\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} < \mathbf{0}$. In diesem Fall nimmt also der Populationsanteil x_i ab. Mit anderen Worten: Derjenige Anteil der Population wird steigen, der über eine überdurchschnittliche Fitness verfügt.

In Matrixschreibweise:

$$\frac{\dot{x}_i(t)}{x_i(t)} = \mathbf{e_i^T A x}(t) - \mathbf{x}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{A x}(t) \qquad \text{für } t \geq 0 \qquad (8.2)^{241}$$

wobei

$$\mathbf{e_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

der i-te Einheitsvektor ist.

Es gilt für die durchschnittliche Fitness:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{A x}(t) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i(t)\, x_j(t)\, a_{i,j} \qquad (8.3)$$

Im Rahmen der evolutorischen Spieltheorie wird der Begriff *Stabilität* aber nicht nur für die sich im Endeffekt einstellende Struktur der Population verwendet, also welchen Anteil die verschiedenen Teilpopulationen letztendlich haben werden; es kann leicht gezeigt werden, dass sich die Population Menschheit einer Struktur 52 % männlich, 48 % weiblich annähern wird.

[241] Vgl. Holler/Illing (2003), S. 371.

Evolutorische Stabilität kann aber auch interpretiert werden, wenn Populationen, die aus den gleichen, aber unterschiedlich zusammengesetzten Teilpopulationen bestehen, aufeinander treffen. Vereinfacht formuliert, bezeichnet man jene Population als resistent, die sich gegenüber der anderen Population als überlegen erweist, d.h. bei einer dauernden Interaktion der beiden Populationen wird sie bei unwesentlichen Änderungen ihrer Zusammensetzung stärker sein als die andere Population.

In unserem Beispiel treffen zwei jeweils aus männlichen und weiblichen Individuen bestehende Populationen aufeinander, wobei die Anteile der männlichen bzw. weiblichen Teilpopulationen allerdings unterschiedlich sind, sich also zwei Populationen menschlicher Individuen gegenüberstehen, deren Zusammensetzung nach Geschlechtern unterschiedlich ist (Tradition, Arbeitskräftemigration). Die Frage ist nun, ob sich eine der Populationen gegen die andere durchsetzen kann.

Dieses Problem wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit bereits gestreift. Im empirischen Assessment des Kapitels 7 wurde die Migration in Bezug auf die verschiedenen Länder erlaubt. Die Arbeitsmarktanalyse nach Goodwin wurde eigentlich unter Verwendung von zwei Populationen unterschiedlicher Zusammensetzung durchgeführt.

Im Weiteren soll das Konzept der *evolutorisch stabilen Strategie (ESS)* kurz behandelt werden.

Evolutorische Prozesse haben, wie schon im Punkt 8.1 erwähnt, drei Aspekte: *Variabilität*, *Mutation* und *Selektion*. (Ohne Variabilität hätten die zwei letzteren keine Grundlage.) Beim Konzept der evolutorisch stabilen Strategie im zuletzt verwendeten Sinne wird der Aspekt der *Mutation* betont, mit anderen Worten, die nach Teilpopulationen unterschiedliche Zusammensetzung der Populationen wird auf das Auftreten von Mutation zurückgeführt.

Eine Strategiemischung, also eine Population von gegebener Zusammensetzung ist im zuletzt besprochenen Sinne evolutorisch stabil, wenn sie sich gegen jede andere Strategiemischung, also gegen jede anders zusammengesetzte Population erfolgreich im gegebenen Umfeld durchsetzen kann. Man bemerke: diese präziser gefasste

evolutorische Stabilität bedeutet nicht, dass die evolutorisch stabile Population einer anderen Population überlegen ist, sondern nur, dass sie letzterer nicht unterlegen ist.

Im Weiteren wird mit *x* eine bestimmte Population (Strategiemischung) bezeichnet, während *y* eine anders gemischte Population repräsentiert.
Mit $a(i,j) \quad i,j = x,y$ wird die erwartete Fitnessauszahlung der Population *i* bezeichnet, wenn sie auf die Population *j* trifft. $a(x,y)$ ist also die erwartete Fitnessauszahlung der *x*-Population, wenn sie auf die *y*-Population trifft.[242]

Die Bedingung der evolutorisch stabilen Strategie kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$(1-\varepsilon)a(x,x)+\varepsilon a(x,y)>(1-\varepsilon)a(y,x)+\varepsilon a(y,y) \qquad (8.4)^{243}$$

Man sieht, dass in der Gleichung die erwarteten Fitnessauszahlungen bei allen möglichen Interaktionen der Populationen enthalten sind. Nach der Definition der erwarteten Fitnessauszahlung enthält die linke Seite der Ungleichung die erwartete Fitnessauszahlung, die die *x*-Population erreichen kann, wenn ihre Individuen untereinander agieren, bzw. mit Individuen der *y*-Population interagieren. Die rechte Seite der Ungleichung enthält dasselbe für die *y*-Population. ε bedeutet die Wahrscheinlichkeit, ein Individuum der *y*-Population zu treffen, (1- ε) entsprechend die Wahrscheinlichkeit ein Individuum der *x*-Population zu treffen. Zusammengefasst: eine *x*-Population ist evolutorisch stabil, wenn ihre erwartete Fitnessauszahlung, egal ob ihre Individuen untereinander, oder mit Individuen der *y*-Population agieren, größer ist, als die erwartete Fitnessauszahlung der *y*-Population, ebenfalls unabhängig davon, ob ihre Individuen untereinander oder mit den Individuen der *x*-Population in die Interaktion treten.

Statt dieser allgemeinen Formulierung verwendet die evolutorische Spieltheorie lineare Zusammenhänge. Die Populationen *x* bzw. *y* werden durch Vektoren

---

[242] Offensichtlich gilt: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$. Vgl.. Holler/Illing (2003), S. 363.

[243] Vgl. Holler/Illing (2003), S. 363.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dargestellt, die erwarteten Fitnessauszahlungen werden mit Hilfe einer Matrix

$$\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1,\ldots,n}$$

dargestellt, wobei a_{ij} die erwartete Fitnessauszahlung eines Individuums vom Typ *i* bezeichnet, wenn es auf ein Individuum vom Typ *j* trifft.

In diesem Sinne bedeutet der Ausdruck **Ax** bzw. **Ay** Vektoren, die die Auszahlungen der Individuen verschiedenen Typs enthalten, wenn sie auf jedes andere Individuum treffen. Bei dieser Schreibweise werden also die individuell erzielbaren Auszahlungen der einzelnen Individuen betrachtet, wobei allerdings bekannt sein muss, um welches Individuum es sich konkret handelt.

Multipliziert man die Ausdrücke **Ax** bzw. **Ay** von links mit den transponierten Vektoren $\mathbf{x}^\mathbf{T}$ bzw. $\mathbf{y}^\mathbf{T}$, dann erhält man die durchschnittliche Auszahlung eines Individuums der *x*- bzw. *y*-Population. In diesem Sinne bedeutet z. B. $\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$ die durchschnittliche Auszahlung eines Individuums der *x*-Population, wenn diese Population auf die *y*-Population trifft.

In diesem Sinne kann Gleichung (8.4) folgendermaßen formuliert werden

$$(1-\varepsilon)\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} > (1-\varepsilon)\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} \qquad (8.5)^{244}$$

Diese Bedingung ist gleichwertig mit der folgenden Formulierung:

$$\mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \forall\mathbf{y} \qquad (8.6)^{245}$$

(Gleichgewichtsbedingung).

[244] Vgl. Holler/Illing (2003), S. 365.
[245] Vgl. Holler/Illing (2003), S. 365.

Wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, dann erfüllt **x** eindeutig die Bedingungen für die evolutorische Stabilität. Nun erlaubt Zusammenhang (8.6) allerdings auch die Gleichheit. Wenn also eine Strategie $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ existiert, die gegen **x** genauso gut abschneidet, wie **x** gegen sich selbst (Pattsituation), d.h. falls $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$, dann wird für die evolutorische Stabilität von **x** noch folgende Bedingung formuliert:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} > \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \tag{8.7}$$ [246]

(Stabilitätsbedingung).

Ungleichung (8.7) bedeutet, dass **x** gegen die Population **y** besser abschneidet, als **y** gegen sich selbst. Die evolutorische Stabilität einer Population **x** bedeutet also, dass **x** entweder eindeutig besser sein muss als **y**. Sollte es der *y*-Population gelingen, eine Pattsituation hervorzurufen, dann muss die durchschnittliche erwartete Auszahlung eines *x*-Individuums beim Spiel gegen die *y*-Population eindeutig größer sein, als die erwartete durchschnittliche Auszahlung eines Individuums der *y*-Population, wenn letztere isoliert agiert.

8.3 Replikator-Dynamik und die Lotka-Volterra-Gleichungen

Wie hängt die evolutorische Spieltheorie aber mit den Lotka-Volterra-Gleichungen zusammen?

Hofbauer zeigte,[247] dass die Replikatorengleichungen von $n+1$ Strategien $y_0, y_1, \ldots, y_n$

$$\dot{y}_i = y_i\left(\sum_j a_{ij}y_j - \sum_{k,l} a_{kl}y_k y_l\right) \qquad i = 0,1, \ldots, n \tag{8.8}$$

[246] Vgl. Holler/Illing (2003), S.365.
[247] Hofbauer (1981), Hofbauer/Sigmund (1984), Kapitel 24 und Hofbauer/Sigmund (1989), Kapitel 7.5.

– abgesehen von einer Transformation der Zeitskala – äquivalent zu den Lotka-Volterra-Gleichungen in n Populationen $x_1, \ldots, x_n$ sind:

$$\dot{x}_i = x_i\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{8.9}$$

Dieses Theorem verwendend werden wir nun die zweidimensionalen klassischen Lotka-Volterra-Gleichungen in die Replikatorengleichungen transformieren und das Ergebnis analysieren.

Die bereits bekannten *zweidimensionalen* Lotka-Volterra-Gleichungen sind wie folgt gegeben:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \tag{8.10}$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-d + cx_1) \tag{8.11}$$

Wenn wir $x_0 = 1$, und $a_{0j} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$ dementsprechend setzen, d. h. wir fügen eine konstant besetzte Spezies hinzu, erhalten wir für die Auszahlungsmatrix der Replikatorengleichung:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \\ -d & c & 0 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

Durch Variablentransformation

$$y_0 = \frac{1}{1 + x_1 + x_2}, \qquad y_1 = \frac{x_1}{1 + x_1 + x_2}, \text{ und} \qquad y_2 = \frac{x_2}{1 + x_1 + x_2} \tag{8.13}$$

wobei y_i Strategien im Sinne der evolutorischen Spieltheorie bezeichnen, ergibt sich das folgende, *dreidimensionale* Differenzialgleichungssystem der Replikatorengleichung:[248]

[248] Eine ausführlichere Herleitung befindet sich im Anhang 4.

$$\dot{y}_0 = y_0[-y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)] \tag{8.14}$$

$$\dot{y}_1 = y_1[ay_0 - by_2 - y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)] \tag{8.15}$$

$$\dot{y}_2 = y_2[-dy_0 + cy_1 - y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)] \tag{8.16}$$

Eine Gleichgewichtslösung des Systems liegt dann vor, wenn sich keine der Strategien in der Zeit ändert, d. h. wenn alle Ableitungen bezüglich der Zeit 0 sind, formal: $\dot{y}_i = 0$, i = 1,2,3.

Neben den Randlösungen gibt es vom inhaltlichen Standpunkt aus nur einen sinnvollen stationären Punkt mit den folgenden Strategien:

$$y_0^* = \frac{bc}{bc + bd + ac}, \quad y_1^* = \frac{bd}{bc + bd + ac}, \text{ und } \quad y_2^* = \frac{ac}{bc + bd + ac} \tag{8.17}$$

Sowohl mit der Anwendung der Gleichgewichts- und Stabilitätsbedingungen (8.6)-(8.7)[249] als auch mit der Stabilitätsanalyse des Differenzialgleichungssystems (8.14)-(8.16)[250] kann gezeigt werden, dass weder die Strategie $y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*)$ noch die Gleichgewichtslösung der Replikatorengleichung stabil sind, erstere im Sinne der evolutorischen Stabilität, letztere im Sinne der asymptotischen Stabilität. Es liegt eine neutral stabile Strategieverteilung in der Population vor, die keine evolutorisch stabile Strategie ist.

8.4 Interpretation der Ergebnisse

Es wird ein aus großer Räuber- und Beutepopulation bestehendes System, z. B. ein Ökosystem, betrachtet. Wir nehmen an, dass alle Lebewesen innerhalb des ganzen Ökosystems auf eine der drei möglichen Verhaltensweisen (inaktiv, friedlich, aggressiv) vorprogrammiert sind. Die Strategien sind dementsprechend jeweils für einen Teil der

[249] Vgl. Anhang 4 Teil II.
[250] Vgl. Anhang 4 Teil III.

ganzen Population des Ökosystems charakteristisch. Die Lebewesen treffen zufällig, paarweise aufeinander und erhalten im Spiel eine Auszahlung gemäß der folgenden Auszahlungsmatrix (Tabelle 8.1). Die Matrix enthält die Auszahlung des Reihenspielers, und weil das Spiel symmetrisch ist, ist die Auszahlung des Spaltenspielers durch die transponierte Auszahlungsmatrix gegeben. Die Parameter *a, b, c,* und *d* sind die gleichen, wie in den klassischen Lotka-Volterra-Gleichungen.

Tabelle 8.1: Auszahlungsmatrix des Lotka-Volterra-Modells

	wenn einen inaktiven Spieler trifft	wenn einen friedlichen Spieler trifft	wenn einen aggressiven Spieler trifft
ein inaktiver Spieler erhält	0	0	0
ein friedlicher Spieler erhält	*a*	0	*-b*
ein aggressiver Spieler erhält	*-d*	*c*	0

Quelle: Eigene Darstellung

Innerhalb einer gegebenen Strategie gibt es keine ‚Aggression', d. h. unter den Individuen, die der gleichen Strategie folgen, gibt es keine Wechselwirkung und deswegen erhält keines von ihnen eine Auszahlung.

Der ‚inaktive' Spieler, wie der Name sagt, nimmt am Spiel direkt nicht teil und erhält auch keine Auszahlung. Wir brauchen diese Strategie trotzdem, weil eine künstliche Strategie im dreidimensionalen System zu den alten hinzukommt, deren Äquivalent (deren äquivalente Population) im zweidimensionalen System im Hintergrund war. Dort wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass der Raum existiert, der der Beute unbegrenzte Nahrung sichert.

Trifft ein ‚friedlicher' Spieler auf einen ‚inaktiven' Spieler, bekommt eine Auszahlung *(a)*, denn er kann von den unbegrenzten Ressourcen profitieren. Wenn er auf einen ‚aggressiven' Spieler trifft, bekommt er eine Auszahlung *(- b)*.

Trifft ein ‚aggressiver' Spieler auf einen ‚inaktiven' Spieler, bekommt er eine Auszahlung *(- d)*, denn es gibt keine Nahrung, d. h. keine Beute, und wird vom Aussterben bedroht. Wenn er auf einen ‚friedlichen' Spieler trifft, da er von der Interaktion profitiert, bekommt eine Auszahlung *(c)*.

Im vorigen Punkt konnte gezeigt werden, dass es einen nichttrivialen Gleichgewichtspunkt im System gibt. Es konnte weiterhin gezeigt werden, dass es sich hierbei nicht um eine evolutorisch stabile Strategie handelt, *was so viel bedeutet, dass sich in diesem Fall eine andere Strategie durchsetzen kann, wenn sie mit einer genügend großen Wahrscheinlichkeit präsent ist.*

8.5 Das Realkapital-Humankapital-Modell als evolutorisches Spiel

Die Herangehensweise der evolutorischen Spieltheorie und die erhaltenen und interpretierten Ergebnisse werden hier auf das im Kapitel 3 vorgestellte Realkapital-Humankapital-Modell angewendet, das ursprüngliche Modell wird als evolutorisches Spiel neu formuliert.

Das Modell hat das Real- und Humankapital als Variablen. Diese sind vollständig substituierbar, in gleicher Maßeinheit angegeben, so dass das Modell als Beschreibung eines Verteilungsproblems interpretiert werden kann.

Für dieses zweidimensionale Modell kann in Analogie zu früheren Abschnitten die dreidimensionale Replikatorengleichung formuliert werden. Auch hier existiert nur ein ökonomisch interpretierbarer Gleichgewichtspunkt. Diese Strategiekombination ist nicht evolutorisch stabil, wobei das dazugehörige Lotka-Volterra-Modell nicht asymptotisch stabil ist. Folglich gibt es mindestens eine Strategiekombination, deren erwartete Auszahlung auf keinen Fall schlechter sein kann, als die zur Gleichgewichtslösung gehörende Auszahlung (woraus nicht unbedingt folgt, dass diese andere Strategie evolutorisch stabil ist).

Das ökonomische System des Realkapital-Humankapital-Modells wird also betrachtet, in dem alle Akteure auf eine der drei möglichen Verhaltensweisen / Strategien

vorprogrammiert sind. Die Strategien sind jeweils für eine Gruppe von Akteuren, d. h. für einen Teil der Bevölkerung charakteristisch. Die drei möglichen Strategien können z. B. ‚inaktiver Akteur', ‚Maschinenhersteller' und ‚Schule' im Sinne von ‚Humankapital-Hersteller' genannt werden, die durch eine Institution, wie z. B. den Markt, verbunden sind.

Die Auszahlungsmatrix ist aufgrund der Analogie zum Lotka-Volterra-Modell gegeben, die Parameter *a, b, c, d* der Lotka-Volterra-Gleichungen werden durch die entsprechenden Ausdrücke aus den Gleichungen (3.37) und (3.38) des Realkapital-Humankapital-Modells ersetzt:

$$a = sA - (g_L + \delta) \qquad b = \gamma \qquad c = \beta A \qquad d = \alpha \qquad (8.18)$$

Tabelle 8.2: Auszahlungsmatrix des Realkapital-Humankapital-Modells

	wenn einen inaktiven Akteur trifft	wenn einen Maschinenhersteller trifft	wenn eine Schule trifft
ein inaktiver Akteur erhält	0	0	0
ein Maschinenhersteller erhält	$sA-(g_L+\delta)$	0	$-\gamma$
eine Schule erhält	$-\alpha$	βA	0

Quelle: Eigene Darstellung

Aufgrund der Analogie erhält man auch die dreidimensionale Replikatorengleichung, und den ökonomisch interessanten Gleichgewichtspunkt. Dieser Zustand, diese Strategiekombination ist nicht evolutorisch stabil, so gibt es mindestens eine Strategie, deren Anteil innerhalb der Bevölkerung auf Kosten der anderen sich ändern / wachsen kann.

Auf der aggregierten Makroebene kann es passieren, dass sich das Verhältnis von Human- und Realkapital so einstellt, dass es sich nicht mehr zeitlich ändert. Das Wirtschaftssystem bleibt somit im stationären Gleichgewicht. Andererseits ist es aber auch möglich, dass eine zyklische Bewegung entlang einer geschlossenen Kurve

erfolgt. Dies geschieht allerdings nicht wegen der Anfangswerte des Systems, sondern aufgrund der Tatsache, dass die Anfangswerte nicht mit dem Gleichgewichtspunkt identisch sind bzw. wegen des individuellen Verhaltens einzelner Wirtschaftsakteure eine solche Strategiekombination entstand, die zu dieser Dynamik führte.

Das spieltheoretische Ergebnis hängt von den Werten der Auszahlungsmatrix ab, die die Auszahlungen der Wirtschaftsakteure beim Treffen auf andere Wirtschaftsakteure beschreibt. Mit anderen Worten: Durch die Änderung der Elemente der Matrix verändern sich die Bedingungen für die Aktivitäten der einzelnen Individuen, was zu einer veränderten Zusammensetzung der „Wirtschaftspopulation“ führt. Somit kann die wirtschaftspolitische Führung die Aktivitäten in gewisser Weise steuern, was zu einem steigenden oder sinkenden Anteil der Teilpopulationen führt.

Dies kann z. B. durch das Schaffen von institutionellen Bedingungen geschehen. So führt z. B. ein Anreiz zum Sparen, d.h. eine Änderung der Sparquote auf der individuellen mikroökonomischen Ebene zu anderen Auszahlungen und somit zu einer sich ändernden Zusammensetzung der Wirtschaftspopulation, was sich auf der Makroebene durch eine Änderung der Periodenlänge des Zyklus darstellt.

Laut der spieltheoretischen Herangehensweise stellt sich eher die Frage: Welcher der Wirtschafsakteure vererbt nach dem mehrmaligen Aufeinandertreffen auf den jeweiligen Akteur seinen eigenen Typ weiter, welche Verhaltensweise(n) kann (können) langfristig überleben und in welchem Masse ist die Wirtschaft dadurch gesteuert bzw. selbst gesteuert.

An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, dass die beobachtbaren Veränderungen im Wirtschaftsleben nicht auf Lernprozesse zurückgehen, sondern auf eine veränderte Zusammensetzung der Menge der Wirtschaftsakteure.

Zusammenfassend muss hier noch einmal erwähnt werden, dass für die untersuchten Fragen zwei verschiedene Herangehensweisen bestehen, wobei die eine in Aggregaten, die andere durch das System der individuellen Beziehungen analysiert. Dadurch gibt es ein vielversprechendes Werkzeug, das den Mikro- und Makroansatz kombiniert. Inwiefern es sich um einen zukunftsträchtigen Ansatz handelt, bleibt abzuwarten.

9. Schlussbetrachtung

Diese Arbeit ist vielleicht keine übliche Dissertation unter dem Aspekt, dass man gewöhnlich ein Thema, eine Fragestellung wählt und dieses dann aus verschiedenen Blickwinkeln ausleuchtet, wobei auch die anzuwendende Methodik bestimmt werden muss. Hier ist eher das Gegenteil der Fall: Es gibt eine Methode, deren Philosophie beeindruckt und deren Anwendungen aus unterschiedlichen Perspektiven analysiert werden.

In diesem Zusammenhang wurde die Vermutung bestätigt, dass dieser Ansatz, diese Herangehensweise des Lotka-Volterra-Modells auf sehr vielen Gebieten Anwendung finden kann, und auch gefunden hat, manchmal auf eine mit dem ursprünglichen Modell fast identische Art und Weise, aber – über die mechanischen Anwendungen hinaus – auch mehrere Verallgemeinerungen sind weitere Überlegungen wert.

Derartige Verallgemeinerungen ruinieren meist die Schönheit und die Eleganz des ursprünglichen Modells, nämlich die Kernaussage, dass es anhaltende regelmäßige Zyklen gibt.

Wie bereits erwähnt, konnten mehrere Anwendungen des Modells gefunden werden, wobei es sich manchmal nur mechanische Anwendungen handelt, manchmal jedoch – erstaunlicherweise – beziehen sich diese Anwendungen auf ganz spezifische Bereiche oder Fragestellungen und warten so mit Überraschungen auf. Aus dieser Sicht ist Palombas Artikel hochinteressant, der bereits etwa 10 Jahre nach dem Erscheinen der ursprünglichen, das Zusammenleben von verschiedenen Populationen beschreibenden, Lotka-Volterra-Modelle eine wirtschaftstheoretische Interpretation gab. Die italienischen Ökonomen spielten zwischen den beiden Weltkriegen eine führende Rolle auf dem Gebiet der Dynamik, ebenso wie auf dem Gebiet der theoretischen Ökonomie. Unter diesem Aspekt ist es nicht verwunderlich, dass Goodwin in Italien etwas wie eine wissenschaftliche Heimat sah und in seiner letzten aktiven Periode nach Siena zog, wo er später auch starb.

Im Hinblick auf den dogmenhistorischen Hintergrund der vorgestellten Modelle ist Samuelsons Brief an die Autorin (vgl. Anhang 1) hervorzuheben, der wichtige – nach Kenntnis der Autorin sonst nicht zu findende – Informationen über die Entstehung des Artikels von Samuelson enthält.

An dieser Stelle soll noch auf zwei recht interessante Erscheinungen (Phänomene) hingewiesen werden. Die eine ist das Problem der Grenzzyklen.

Für die Naturwissenschaften sind die regelmäßigen, also konstante Zykluslänge und konstante Amplitude aufweisenden Zyklen im Wesentlichen uninteressant, weil die Natur im Allgemeinen die schöne Eigenschaft hat, dass sie zumeist entweder stabil ist, oder aber extreme Instabilität (Explosion, Fusion) aufweist. Die neutrale Stabilität (des Lotka-Volterra-Modells) kann eigentlich kaum beobachtet werden. Das Interesse der Naturwissenschaftler konzentriert sich jedoch logischerweise in erster Linie auf die Stabilität der Prozesse. Bei stabilen Systemen werden in naturwissenschaftlichen Modellen abstrakte Zyklen untersucht, die Attraktoren beobachtbarer Fluktuationen sind (Grenzzyklen). Hisch / Smale zeigt, dass die geschlossenen Lösungskurven des klassischen Lotka-Volterra-Models keine Grenzzyklen sind, nicht einmal in einer speziellen Interpretation.[251] Es kann aber nicht ausgeschlossen werden, dass die Zyklen des klassischen Lotka-Volterra-Models Grenzzyklen von in der Realität beobachtbaren Zyklen sein können. (Dies ist nur unter sehr speziellen Umständen eventuell vorstellbar; siehe das im Kapitel 3 vorgestellte dritte Model von Samuelson im Aufsatz „A Universal Cycle“.)

Das andere interessante Ergebnis ist, dass der Zusammenhang dieses Modells mit den evolutionären Spielen aufgrund des Beitrages von Hofbauer/Siegmund (vgl. Kapitel 8) aufgezeigt werden konnte, was wiederum eine völlig neue Perspektive in die Analyse bringt. Die Analyse auf der Populationsebene geht dadurch nämlich in die Interaktion der Individuen, also in eine Analyse auf der Ebene der Individuen über. Dadurch sind die Mikro- und Makroebene eng miteinander verbunden, und dies kann als Ausgangspunkt zur Verknüpfung der bisher separat behandelten Mikro- und

[251] Vgl. Hirsch/Smale (2013), S. 240.

Makroanalysen dienen, was nicht nur in den Wirtschaftswissenschaften, sondern ganz allgemein in den Sozialwissenschaften wünschenswert wäre.

Literaturverzeichnis

Aitchison, John/Brown, James A. C. (1957): The lognormal distribution. With special reference to its uses in economics. Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Aly, Shaban/Farkas, Miklós (2004): Competition in patchy environment with cross diffusion, in: Nonlinear Analysis: Real World Applications, Jg. 5, Nr. 4, S. 589-595.

Anishchenko, Vadim S./Astakhov, Vladimir/Neiman, Alexander et al. (2007): Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. 2. Aufl., Berlin, Springer.

Assenmacher, Walter (1998): Konjunkturtheorie. 8. vollst. überarb. Aufl., München, Oldenbourg.

Bacaër, Nicolas (2011): A short history of mathematical population dynamics. London, Springer.

Barnett, William A. (2004): An Interview with Paul A. Samuelson, in: Macroeconomic Dynamics, Jg. 8, Nr. 04, S. 519-542.

Becker, Ortwin (1975): Verallgemeinerung eines zyklischen Wachstumsmodells von Goodwin, in: Becker, Ortwin/Richter, Rudolf (Hrsg.): Dynamische Wirtschaftsanalyse. Theorie. Experiment. Entscheidung. Heinz Sauermann zum 70. Geburtstag. Tübingen, Mohr, S. 13-19.

Blümle, Gerold (1989): Wachstum und Konjunktur bei Differenzgewinnen – Ein Schumpeter-Modell der wirtschaftlichen Entwicklung, in: Ramser, Hans J./Riese, Hajo (Hrsg.): Beiträge zur angewandten Wirtschaftsforschung. Berlin, Springer, S. 13-37.

Boyce, William E./DiPrima, Richard C. (1995): Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung – Aufgaben – Lösungen. Heidelberg u.a., Spektrum Akademischer Verlag.

Brander, James A./Taylor, M. Scott (1998): The simple economics of Easter Island: A Ricardo-Malthus model of renewable resource use, in: The American Economic Review, Jg. 88, Nr. 1, S. 119-138.

Brown, Gardner/Berger, Brett/Ikiara, Moses (2005): A predator-prey model with an application to Lake Victoria fisheries, in: Marine Resource Economics, Jg. 20, Nr. 3, S. 221-248.

Bródy, András/Farkas, Miklós (1987): A gazdaság mozgásformáiról, in: Közgazdasági Szemle, Jg. 34, Nr. 10, S. 1178-1184.

Bródy, András/Farkas, Miklós (1987): Forms of economic motion, in: Acta Oeconomica, Jg. 38, Nr. 3, S. 361-370.

Camagni, Roberto (1992): Economia urbana. Principi e modelli teorici. Roma, Nuova Italia Scientifica.

Camagni, Roberto (2016): Urban development and control on urban land rents, in: The Annals of Regional Science, Jg. 56, Nr. 3, S. 597-615.

Capello, Roberta (Hrsg.) (2017): Seminal Studies in Regional and Urban Economics. Contributions from an Impressive Mind. Springer.

Capello, Roberta/Faggian, Alessandra (2002): An economic-ecological model of urban growth and urban externalities: empirical evidence from Italy, in: Ecological Economics, Jg. 40, Nr. 2, S. 181-198.

Chiarella, Carl (1990): The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 343). Berlin, Springer.

Cugno, Franco/Montrucchio, Luigi (1982): Cyclical Growth and Inflation: a Qualitative Approach to Goodwin's Model with Money Prices, in: Economic Notes, Jg. 11, Nr. 3, S. 93-107.

Dal-Pont, Muriel/ Hagemann, Harald (2005): Equilibrium and the business cycle: From the inter-war debates to modern approaches, in: Conference "The History of Macroeconomics". Louvain-la-Neuve, Belgium, January 2005.

Dendrinos, Dimitrios S. (1980): A basic model of urban dynamics expressed as a set of Volterra-Lotka equations, in: Dendrinos, Dimitrios S.: Catastrophe Theory in Urban and Transport Analysis. Report No. DOT/RSPA/DPB-25/80/20. Washington, US Department of Transportation, S. 79-103.

Dendrinos, Dimitrios S./Mullally, Henry (1981): Evolutionary patterns of urban populations, in: Geographical Analysis, Jg. 13, Nr. 4, S. 328-344.

Desai, Meghnad (1973): Growth cycles and inflation in a model of class struggle, in: Journal of Economic Theory, Jg. 6, Nr. 6, S. 527-545.

Desrosières, Alain (2005): Die Politik der großen Zahlen: eine Geschichte der statistischen Denkweise. Berlin, Springer.

Di Matteo, Massimo (1984): Alternative monetary policies in a classical growth cycle, in: Goodwin, Richard M./Kruger, Michael/Vercelli, Alessandro (Hrsg.): Nonlinear Models of Fluctuating Growth. Berlin, Springer, S. 14-24.

Di Matteo, Massimo (1988): Goodwin and the Evolution of a Capitalistic Economy: An Afterthought, in: Ricci, Gianni/Velupillai, Kumaraswamy (Hrsg.): Growth Cycles and Multisectoral Economics: The Goodwin Tradition. Berlin, Springer, S. 93-101.

Dopfer, Kurt/Foster, John/Potts, Jason (2004): Micro-meso-macro, in: Journal of evolutionary economics, Jg. 14, Nr. 3, S. 263-279.

Epstein, Joshua M. (1997): Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science (Santa Fe Institute studies in the sciences of complexity, 4). Massachusetts, Addison-Wesley Publishing Company.

Fanti, Luciano/Manfredi, Piero (1997): Point stability versus orbital stability (or instability): remarks on policy implications in classical growth cycle model (Report n.116). Università di Pisa, Dipartimento di statistica e matematica applicata all'Economia.

Farkas, Miklós (2001): Dynamical Models in Biology. New York, Academic Press.

Farkas, Miklós/Kotsis, M. (1992): Modelling predator-prey and wage-employment dynamics, in: Dynamic Economic Models and Optimal Control. Amsterdam, Elsevier Science Publishers, S. 513-526.

Feldman, Grigorij A./Kratsch, Ottomar (1969): Zur Wachstumstheorie des National-einkommens. Berlin, Akademie-Verlag.

Frisch, Ragnar (1933): Propagation problems and impulse problems in dynamic economics, in: Economic Essays in Honour of Gustav Cassel. London, Allen & Unwin Ltd.

Frisch, Ragnar (1974): Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

Fusari, Angelo (1996): Paths of economic development: modelling factors of endogenous growth, in: International Journal of Social Economics, Jg. 23, Nr. 10/11, S. 164-191.

Fusari, Angelo (2005): Uncertainty, competence and the theory of the firm. Some crucial omission and misunderstanding of the current debate. Second meeting of the European Network on the Economics of the Firm (ENEF), Erasmus University, Rotterdam, 8-9 September 2005.

Fusari, Angelo (2013): Radical Uncertainty, Dynamic Competition and a Model of the Business Cycle: The Implications of a Measure and an Explanation of What Is Supposed Non-Measurable and Non-Explainable, in: International Journal of Business and Management, Jg. 8, Nr. 12, S. 8-28.

Gabler Wirtschaftslexikon (2000): s.v. Konjunkturtheorie und Räuber-Beute-Modelle. 15., vollst. überarb. und aktualisierte Aufl., Wiesbaden, Gabler.

Galeotti, Marcello/Gori, Franco (1990a): Global dynamics in models of fluctuating growth Part I: Two dimensional systems, in: Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali, Jg. 13, Nr. 1-2, S. 111-131.

Galeotti, Marcello/Gori, Franco (1990b): Global dynamics in models of fluctuating growth Part II: Three dimensional systems, in: Rivista di matematica per le scienze economiche e sociali, Jg. 13, Nr. 1-2, S. 133-145.

Gandolfo, Giancarlo (2005): Economic Dynamics. Berlin, Springer.

Gandolfo, Giancarlo (2008): Giuseppe Palomba and the Lotka-Volterra equations, in: Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei-Scienze Fisiche e Naturali, Jg. 19, Nr. 4, S. 347-357.

Gause, Georgii F. (1934): The struggle for existence. Baltimore, Williams & Wilkins Company.

Glombowski, Jörg (1979): Ein überakkumulationstheoretisches Modell zyklischen Wachstums mit variabler Kapazitätsauslastung, in: Argument, Sonderband 35, S. 135-148.

Glombowski, Jörg/Krüger, Michael (1988): A short-period Goodwin growth cycle (Research Memorandum FEW, FEW 317). Tilburg University Faculteit der Economische Wetenschappen.

Goh, Bean S./Leitmann, George/Vincent, Thomas L. (1974): Optimal control of a prey-predator system, in: Mathematical Biosciences Jg. 19, Nr. 3-4, S. 263-286.

Goodwin, Richard M. (1951): The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, in: Econometrica, Jg. 19, Nr. 1, S. 1-17.

Goodwin, Richard M. (1953): The problem of trend and cycle, in: Bulletin of Economic Research, Jg. 5, Nr. 2, S. 89-97.

Goodwin, Richard M. (1955): A model of cyclical growth, in: Lundberg, Erik (Hrsg.): The Business Cycle in the Post-War World (Proceedings of International Economic Association Conference). London, Macmillan, S. 203-221.

Goodwin, Richard M. (1967): A Growth Cycle, in: Feinstein, Charles H. (Hrsg.): Socialism, Capitalism and Economic Growth: Essays presented to M. Dobb. Cambridge, Cambridge University Press, S. 54-58.

Goodwin, Richard M. (1972): A Growth Cycle (Revidierte und erw. Version), in: Hunt, Emery K./Schwartz, Jesse G. (Hrsg.): A Critique of Economic Theory. Harmondsworth, Penguin, S. 442-449.

Goodwin, Richard M. (1982): Essays in Economic Dynamics. London, Macmillan.

Goodwin, Richard M. (2018): Predator-Prey Models, in: Macmillan Publishers Ltd (Hrsg.): The New Palgrave Dictionary of Economics. 3. Aufl., London, Palgrave Macmillan, S. 10599-10600.

Goodwin, Richard M./Krüger, Michael/Vercelli, Alessandro (Hrsg.) (1984): Nonlinear Models of Fluctuating Growth, in: Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Jg. 228, Berlin, Springer.

Gorman, Sean P./Kulkarni, Rajendra G./Schintler, Laurie A. et al. (2004): A predator prey approach to the network structure of cyberspace, in: Proceedings of the winter international symposium on Information and communication technologies. Trinity College Dublin, S. 1-6.

Guerraggio, Angelo/Paoloni, Giovanni (2011): Vito Volterra. Basel, Birkhäuser.

Hadeler, Karl-Peter (2004): Skript zur Vorlesung Mathematik für Biologen 3. Eberhard Karls Universität Tübingen,

http://www.uni-tuebingen.de/uni/bcm/mb3/script.pdf, (Stand12.11.2004).

Hagedorn, Andreas/Keller, Katja (1997): Workshop „Konjunktur“: Das Goodwin-Modell (Diskussionsbeiträge des Instituts für Allgemeine Wirtschaftsforschung, Abt. für Mathematische Ökonomie, Nr. 14). Freiburg im Breisgau, Albert-Ludwigs-Universität.

Hannesson, Rögnvaldur (1983): Optimal harvesting of ecologically interdependent fish species, in: Journal of Environmental Economics and Management, Jg. 10, Nr. 4, S. 329-345.

Harrod, Roy F. (1936): The Trade Cycle: An Essay. London, Oxford University Press.

Harvie, David (2000): Testing Goodwin: growth cycles in ten OECD countries, in: Cambridge Journal of Economics, Jg. 24, Nr. 3, S. 349-376.

Haydon, Daniel T./Lloyd, Alun L. (1999): On the Origins of the Lotka-Volterra Equations, in: Bulletin of the Ecological Society of America, Jg. 80, Nr. 3, S. 205-206.

Heubes, Jürgen (1991): Konjunktur und Wachstum. München, Vahlen.

Hevér, Boglárka (2009): Agglomeráció és technológia. Manuskript des Vortrages im 9. Europäischen Doktorandenseminar (EDS) Development and Economic Policy, TU Budapest.

Hicks, John R. (1950): A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford, Clarendon Press.

Hirsch, Morris W./Smale, Stephen (1974): Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. New York, Academic Press.

Hirsch, Morris W./Smale, Stephen/Devaney, Robert L. (2013): Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. 3. Aufl., Amsterdam, Elsevier Acad. Press.

Hodgson, Geoffrey M. (Hrsg.) (2009): Darwinism and economics. Cheltenham, Elgar.

Hofbauer, Josef (1981): On the occurrence of limit cycles in the Volterra-Lotka differential equation, in: Nonlinear Analysis, Jg. 5, Nr. 9, S. 1003-1007.

Hofbauer, Josef/Sigmund, Karl (1984): Evolutionstheorie und dynamische Systeme. Mathematische Aspekte der Selektion. Berlin u. Hamburg, Paul Parey.

Hofbauer, Josef/Sigmund, Karl (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambridge, Cambridge University Press.

Holler, Manfred J./Illing, Gerhard (2003): Einführung in die Spieltheorie. Berlin, Springer.

Israel, Giorgio (1988): On the Contribution of Volterra and Lotka to the Development of Modern Biomathematics, in: History and Philosophy of the Life Sciences, Jg. 10, Nr. 1. S. 37-49.

Israel, Giorgio (1999): The scientific heritage of Vito Volterra and Alfred J. Lotka in mathematical biology, in: Cerrai, Paola/Freguglia, Paolo (Hrsg.): La matematizzazione della biologia. Storia e problematiche attuali. Urbino, QuattroVenti, S. 145-160.

Israel, Giogrio/Gasca, Ana M. (2002): The Biology of Numbers: the Correspondence of Vito Volterra on Mathematical Biology. Basel u.a., Birkhäuser.

Jansen, Vincent A. (1994): The dynamics of two diffusively coupled, identical Lotka-Volterra patches, in: Jansen, Vincent A.: Theoretical aspects of metapopulation dynamics (Doctoral Thesis). Leiden, Leiden University.

Jansen, Vincent A. (1995): Regulation of predator–prey systems through spatial interactions: a possible solution to the paradox of enrichment, in: Oikos Jg. 74, Nr. 3, S. 384-390.

Káldor, Nicholas (1940): A model of the trade cycle, in: The Economic Journal, S. 78-92.

Kingsland, Sharon E. (1995): Modeling Nature. Episodes in the History of Population Ecology. Chicago u.a., University of Chicago Press.

Kolmogoroff, Andrej N. (1936): On Volterra's theory of the struggle for existence, in: Scudo, Francesco M./Ziegler, James R. (Hrsg.) (1978): The Golden Age of Theoretical Ecology. Lecture Notes in Biomathematics 22. Berlin u.a., Springer, S. 287-292.

Krugman, Paul R. (1991): Geography and Trade. Leuven, Leuven University Press, Cambridge u.a., MIT Press.

Lancaster, Kelvin (1973): The dynamic inefficiency of capitalism, in: Journal of Political Economy, Jg. 81, Nr. 5, S. 1092–1109.

Lorenz, Hans-Walter (1999): Nichtlineare Dynamik in der Ökonomie, in: Mainzer, Klaus (Hrsg.): Komplexe Systeme und Nichtlineare Dynamik in Natur und Gesellschaft. Berlin u.a., Springer, S. 375-399.

Lotka, Alfred J. (1910): Contribution to the theory of periodic reactions, in: The Journal of Physical Chemistry, Jg. 14, Nr. 3, S. 271-274.

Lotka, Alfred J. (1920a): Undamped oscillations derived from the law of mass action, in: Journal of the American Chemical Society, Jg. 42, Nr. 8, S. 1595-1599.

Lotka, Alfred J. (1920b): Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems, in: Proceedings of the National Academy of Science, Jg. 6, Nr. 7, S. 410-415.

Lotka, Alfred J. (1925): Elements of Physical Biology. Baltimore, Williams & Wilkins.

reprint (1956): Elements of Mathematical Biology. New York, Dover Publications.

Manfredi, Piero/Fanti, Luciano (1999): Gestation Lags and Efficiency Wage Mechanism in a Goodwin-Type Growth Cycle Model, in: Studi Economici Jg. 68, Nr. 2, S. 95-127.

Manfredi, Piero/Fanti, Luciano (2004): Cycles in Dynamic Economic Modelling, Economic Modelling, Jg. 21, Nr. 3. S. 573–594.

Marshall, Alfred (2013): Principles of economics (Palgrave classics in economics). 8. Aufl., Basingstoke, Palgrave Macmillan.

Marx, Karl (1962): Das Kapital. Erster Band. MEW 23, in: Marx-Engels-Werke (MEW), Berlin, Dietz.

Marx, Karl (1963): Das Kapital. Zweiter Band. MEW 24, in: Marx-Engels-Werke (MEW), Berlin, Dietz.

Marx, Karl (1964): Das Kapital. Dritter Band. MEW 25, in: Marx-Engels-Werke (MEW), Berlin, Dietz.

Matsumoto, Akio (2009): Note on Goodwin's 1951 nonlinear accelerator model with an investment delay, in: Journal of Economic Dynamics and Control, Jg. 33, Nr. 4, S. 832-842.

Mátyás, Antal (1993): A modern közgazdaságtan története. Budapest, Aula Kiadó.

Meyer, Dietmar (2001): Technology Induced Cycles in Centrally Directed Economies with Stable Price Level, in: Társadalom és gazdaság Közép- és Kelet-Európában / Society and Economy in Central and Eastern Europe, Jg. 23, Nr. 1/2, S. 89-102.

Meyer, Dietmar (2003): Evolúciós közgazdaságtan elmélettörténeti szemszögből vagy közgazdasági elmélettörténet evolúciós szemszögből, in: Bekker, Zsuzsa (Hrsg.): Tantörténet és közgazdaságtudomány. Budapest, Aula Kiadó, S. 295-310.

Meyer, Dietmar (2005): Egyéb konjunktúra-modellek. Manuskript.

Meyer, Eric C./Müller-Siebers, Karl-Wilhelm/Ströbele, Wolfgang (1998): Wachstumstheorie. 2., völlig überarb. Aufl., München u.a., Oldenbourg.

Nelson, Richard R./Winter, Sidney G. (1982): An evolutionary theory of economic change. Cambridge, Belknap Press of Harvard University Press.

OECD (2008): SourceOECD National Accounts Statistics. Annual National Accounts Volume I - Main Aggregates Volume 2008 release 01,

http://puck.sourceoecd.org/vl=2826883/cl=20/nw=1/rpsv/ij/oecdstats/16081188/v149n1/s1/p1 (Stand 01.04.2009).

OECD (2008): *SourceOECD* Employment and Labour Market Statistics. Population and labour force statistics Volume 2008 release 01,

http://puck.sourceoecd.org/vl=2826883/cl=20/nw=1/rpsv/ij/oecdstats/16081161/v125n1/s2/p1 (Stand 01.04.2009).

Okruch, Stefan (2001): Der Richter als Institution einer spontanen Ordnung, in: ORDO-Jahrbuch für die Ordnung von Wirtschaft und Gesellschaft, Bd. 52, S. 131-154.

Orishimo, Isao (1987): An approach to urban dynamics, in: Geographical Analysis, Jg. 19, Nr. 3, S. 200-210.

Ortlieb, Claus P. (2009): Dynamische Modelle in den Lebens- und Gesellschaftswissenschaften, Universität Hamburg, Fachbereich Mathematik,
https://www.math.uni-hamburg.de/home/ortlieb/DynModSkript.pdf,
(Stand: 07.03.2016).

Ott, Alfred E. (1963): Einführung in die dynamische Wirtschaftstheorie. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht.

Palomba, Giuseppe (1939): Introduzione allo studio della Dinamica Economica. Napoli, Casa Editrice Dr. Eugenio Jovene.

Perona, Eugenia (2005): Birth and Early History of Nonlinear Dynamics in Economics, in: Revista de Economía y Estadística, Jg. 43, Nr. 2, S. 29-60.

Pohjola, Matti. T. (1981): Stable, cyclic and chaotic growth: The dynamics of a discrete-time version of Goodwin's growth cycle model, in: Journal of Economics, Jg. 41, Nr. 1-2, S. 27-38.

Pommerening, Klaus (1987): Computersimulation dynamischer Systeme dargestellt am Beispiel der Räuber-Beute-Systeme und anderer Wachstumsmodelle aus der Ökologie,

https://www.staff.uni-mainz.de/pommeren/Artikel/Oekosim.pdf, (Stand: 07.03.2016).

Ragozin, David L./Brown Jr, Gardner (1985): Harvest policies and nonmarket valuation in a predator-prey system, in: Journal of Environmental Economics and Management, Jg. 12, Nr. 2, S. 155-168.

Richter, Rudolf/Schlieper, Ulrich/Friedmann, Willy (1981): Makroökonomik. Eine Einführung. 4., korrigierte und erg. Aufl., Berlin, Springer.

Riechmann, Thomas (2002): Spieltheorie. München, Vahlen.

Ringel, Claus M. (2002): Leitfaden: Mathematik für Biologen. Universität Bielefeld, http://www.math.uni-bielefeld.de/birep/biomath, (Stand: 12.11.2004).

Rosser, J. Barkley (2011): Complex Evolutionary Dynamics in Urban-Regional and Ecologic-Economic Systems. From Catastrophe to Chaos and Beyond. New York, Springer Science+Business Media.

Samuelson, Paul A. (1939): Interaction Between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, in: Review of Economics and Statistics, Jg. 21, Nr. 2, S. 75-78.

Samuelson, Paul A. (1947): Foundations of economic analysis. Cambridge, Harvard University Press.

Samuelson, Paul A. (1967): A Universal Cycle?, in: Henn, Rudolf (Hrsg.): Methods of Operations Research, Bd. III, S. 307-320.

Samuelson, Paul A. (1971): Generalized Predator-Prey Oscillations in Ecological and Economic Equilibrium, in: Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, Jg. 68, No. 5, S. 980-983.

Samuelson, Paul A. (1974): A Biological Least-Action Principle for the Ecological Model of Volterra-Lotka, in: Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, Jg. 71, No. 8, S. 3041-3044.

Samuelson, Paul A. (1998): How foundations came to be, in: Journal of Economic Literature, Jg. 36, Nr. 3, S. 1375-1386.

Schaefer, Matthias (2012): Wörterbuch der Ökologie. Heidelberg, Spektrum.

Schmidt, Günter (1998): Die nichtlinearen endogenen Konjunkturmodelle von Goodwin und Káldor. Darstellung, Erweiterungen und empirische Relevanz. Frankfurt am Main u.a., Lang.

Schohl, Frank (1999): Die marktttheoretische Erklärung der Konjunktur (Schriften zur angewandten Wirtschaftsforschung, Bd. 83). Tübingen, Mohr Siebeck.

Scudo, Francesco M./Ziegler, James R. (Hrsg.) (1978): The Golden Age of Theoretical Ecology (Lecture Notes in Biomathematics, Bd. 22). Berlin u.a., Springer.

Shah, Anup/Desai, Meghnad (1981): Growth Cycles with Induced Technical Change, in: The Economic Journal, Jg. 91, Nr. 364, S. 1006-1010.

Silverberg, Gerald (1984): Embodied technical progress in a dynamic economic model: the self-organization paradigm, in: Goodwin, Richard M./Krüger, Michael/ Vercelli, Alessandro (Hrsg.): Nonlinear Models of Fluctuating Growth. Berlin, Springer, S. 192-208.

Smith, John M. (1982): Evolution and the Theory of Games. Cambridge, Cambridge University Press.

*Smith, John M./*Price, George R. (1973): The logic of animal conflict, in: Nature, Jg. 246, Nr. 5427, S. 15-18.

Solow, Robert M. (1990): Goodwin's Growth Cycle: Reminiscence and Rumination, in: Velupillai, Kumaraswamy (Hrsg.): Nonlinear Multisectoral Macrodynamics: Essays in Honour of Richard Goodwin. New York, New York University Press, S. 31-41.

Söllner, Fritz (2015): Die Geschichte des ökonomischen Denkens. 4. korr. Aufl., Berlin, Springer Gabler.

Sportelli, Mario C. (1995): A Kolmogoroff generalized predator-prey model of Goodwin's growth cycle, in: Journal of Economics, Jg. 61, Nr. 1, S. 35-64.

Stöppler, Siegmar (Hrsg.) (1980): Dynamische ökonomische Systeme: Analyse und Steuerung. Wiesbaden, Gabler.

Ströbele, Wolfgang J./Wacker, Holger (1991): The concept of sustainable yield in multi-species fisheries, in: Ecological modelling, Jg. 53, S. 61-74.

Takeuchi, Yasuhiro (1996): Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems. Singapore u.a., World Scientific.

van der Ploeg, Frederick (1983): Economic growth cycles and conflict over the distribution of income, in: Journal of Economic Dynamics and Control, Jg. 6, S. 253-179.

Velupillai, Kumaraswamy (1979): Some stability properties of Goodwin's growth cycle, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Jg. 39, Nr. 3-4, S. 245-57.

Veneziani, Roberto/Mohun, Simon (2006): Structural stability and Goodwin's growth cycle, in: Structural Change and Economic Dynamics, Jg. 17, Nr. 4, S. 437-451.

Vercelli, Alessandro (1988): Goodwin and the MKS System, in: Ricci, Gianni/Velupillai, Kumaraswamy (Hrsg.): Growth Cycles and Multisectoral Economics: The Goodwin Tradition. Berlin, Springer, S. 102-111.

Véron, Jacques (2008): Alfred J. Lotka and the mathematics of population, in: Electronic Journal for History of Probability and Statistics, Jg. 4, Nr. 1, S. 1-10,
http://www.jehps.net/juin2008/Veron.pdf, (Stand 12.11.2010).

Volterra, Vito (1926): Fluctuation in the Abundance of Species Considered Mathematically, in: Nature, Jg. 118, Nr. 2972, S. 558-560.

Volterra, Vito (1927a): Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi, in: Memorie del R. Comitato Talassografico Italiano, Memoria CXXXI.

Volterra, Vito (1927b): Variations and fluctuations in the numbers of coexisting animal species, in: Scudo, Francesco M./Ziegler, James R. (Hrsg.) (1978): The Golden Age of Theoretical Ecology (Lecture Notes in Biomathematics, Bd. 22). Berlin u.a., Springer, S. 65-236.

Volterra, Vito (1931): Leçon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris, Gauthier-Villars.

Vosgerau, Hans-Jürgen (1982): Goodwins Wachstumszyklus der Beschäftigung und Verteilung. Diskussionsbeiträge - Serie A, Nr. 168, Universität Konstanz, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Statistik.

Wacker, Holger (2000): Nicht-walrasianische Konjunkturtheorie und Räuber-Beute-Interaktion – Das Goodwin-Modell, in: Jahrbuch für Wirtschafts-wissenschaften/Review of Economics, Jg. 51, Nr. 2, S. 140-152.

Wacker, Holger/Blank, Jürgen E. (1998): Ressourcenökonomik. Band 1: Einführung in die Theorie regenerativer natürlicher Ressourcen. München u.a., Oldenbourg.

Wacker, Holger/Blank, Jürgen E. (1999): Ressourcenökonomik. Band 2: Einführung in die Theorie erschöpfbarer natürlicher Ressourcen. München u.a., Oldenbourg.

Wang, Jinfeng/Shi, Junping/Wei, Junjie (2011): Predator-prey system with strong Allee effect in prey, in: Journal of Mathematical Biology, Jg. 62, Nr. 3, S. 291-331.

Wenzel, Heinz-Dieter (2001): Growth Equilibria with Public Debt, in: Society and Economy in Central and Eastern Europe, Jg. 23, Nr. /1-2, S. 70-88.

Wilen, James/Brown Jr, Gardner (1986): Optimal recovery paths for perturbations of trophic level bioeconomic systems, in: Journal of Environmental Economics and Management, Jg. 13, Nr. 3, S. 225-234.

Wolfstetter, Elmar (1982): Fiscal Policy and the Classical Growth Cycle, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Jg. 42, Nr. 4, S. 375-393.

Zalai, Ernő (2011): Matematikai közgazdaságtan I. Általános egyensúlyi modellek és mikroökonómiai elemzések. Budapest, Akadémiai Kiadó.

Zambelli, Stefano (2004): The Rocking Horse that Didn't Rock: Frisch's Propagation Problems and Impulse Problems. Centre for Comparative Welfare Studies, Institut for Økonomi, Politik og Forvaltning, Aalborg Universitet.

Anhang

Anhang 1: Brief von Samuelson an Eszter Megyeri vom 17. August 2006

MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY

DEPARTMENT OF ECONOMICS
50 MEMORIAL DRIVE
CAMBRIDGE, MASSACHUSETTS 02142-1347

17 August 2006

Ms. Eszter Megyeri

Budapest
Hungary

Dear Ms. Megyeri,

I glanced through the five volumes of *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson* (MIT Press, 1966, 1966, 1972, 1979, 1986) and call to your attention the following chapters that are somehow related to the Votka-Volterra ecological model.

Chapter 170, "A Universal Cycle" (R. Henn, ed., *Methods of Operations Research III*, Muhlgasse, Verlag Anton Hain, 1967), Volume 3.

Chapter 171, "Generalized Predator-Prey Oscillations in Ecological and Economic Equilibrium" (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, May, 1971), Volume 3.

Chapter 232, "A Biological Least-Action Principle for the Ecological Model of Volterra-Lotka" (*Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 71.8, August, 1974: 3041-44), Volume 4.

Chapter 234, "A Dynamical Model for Human Population" with Joel Yellin (*Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 71.7, July 1974: 2813-2817), Volume 4.

Chapter 235, "Time Symmetry and Asymmetry in Population and Deterministic Dynamic Systems" (*Theoretical Population Biology*, 9.1, February 1976: 81-122), Volume 4.

Chapter 237, "An Economist's Non-Linear Model of Self-generated Fertility Waves (*Population Studies*, 30.2, July, 1976: 243-247), Volume 4.

Chapter 238, "Scale Economies and Non-labor Returns at the Optimum Population (*Eastern Economic Journal*, April/June 1974: 125-127), Volume 4.

Chapter 239, "Social Darwinism" (*Newsweek*, July 7, 1975: 55), Volume 4.

Chapter 346, "Maximizing and Biology" (*Economic Inquiry*, Vol. 16, April 1978: 171-183), Volume 5.

Chapter 347, "Complete Genetic Models for Altruism, Kin Selection and Like-Gene Selection" (*Journal of Social and Biological Structures*, Vol. 6, 1983: 3-15), Volume 5.

Chapter 348, "Models of Thought in Economics and Biology," (*American Economic Review*, 75.2, May, 1985: 166-172), Volume 5.

Chapter 349, " Comparison of Linear and Nonlinear Models for Human Population Dynamics," with Joel Yellin (*Theoretical Population Biology*, 11.1, February, 1977: 105-126), Volume 5.

Chapter 350, "Fisher's 'Reproductive Value' as an Economic Specimen in Merton's Zoo (*Transactions of the New York Academy of Sciences*, Series 2, Vol. 39, April 1980: 126-142), Volume 5.

Chapter 351, "Generalizing Fisher's 'Reproductive Value': Linear Differential and Difference Equations of 'Dilute' Biological Systems" (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, 74.11, November, 1977: 5186-5192), Volume 5.

Chapter 352, "Generalizing Fisher's 'Reproductive Value': Nonlinear, Homogeneous Biparental Systems" (*Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, 74.12, December, 1977: 5772-5775), Volume 5.

Chapter 353, "Generalizing Fisher's 1 Reproductive Value': Overlapping and Non-overlapping Generations with Competing Genotypes" (*Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 75.8, August, 1978: 4062-4066), Volume 5.

Chapter 354, "Generalizing Fisher's 'Reproductive Value': 'Incipient' and 'Penultimate' Reproductive-Value Functions when Environment Limits Growth; Linear Approximants for Nonlinear Mendelian Mating Models" (*Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 75.12, December, 1978: 6327-6331), Volume 5.

My original interest in Volterra models came from my studies of integral equations in the 1930's. Volterra was very repetitive and to my mind he concentrated too much on conservative dynamical systems that exhibited strictly periodic motions. Realistic laws of diminishing returns would tend to dampen down those periodic motions.

"A Universal Cycle" was written in honor of the fruitful German mathematical economist Krelle. Actually, it was kind of a "spoof." I did not take seriously notions that the Marxian class struggle could be likened to foxes-eat-rabbits dynamics. However, like Darwin I did think that 1798 Malthus became important for nineteenth century theories of evolution by natural selection.

If you have trouble in getting access to my volumes of *Collected Scientific Papers*, my editorial assistant Janice Murray might be persuaded to give you some help.

Sincerely,

Paul A Samuelson

Paul A. Samuelson

PAS/jmm

Anhang 2: Stabilitätsuntersuchung des vierdimensionalen Räuber-Beute-Modells (6.1)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1(a - by_1) + r(x_2 - x_1) \\
\dot{y}_1 &= y_1(-d + cx_1) + s(y_2 - y_1) \\
\dot{x}_2 &= x_2(a - by_2) + r(x_1 - x_2) \\
\dot{y}_2 &= y_2(-d + cx_2) + s(y_1 - y_2)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Dieses System hat einen positiven Gleichgewichtspunkt:

$x_1^* = d/c$, $y_1^* = a/b$, $x_2^* = d/c$ und $y_2^* = a/b$.[252]

Untersuchung dieses stationären Punktes:

Die allgemeine Jacobi-Matrix hat die Form:

$$\mathbf{J}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{bmatrix} a - by_1 - r & -bx_1 & r & 0 \\ cy_1 & -d + cx_1 - s & 0 & s \\ r & 0 & a - by_2 - r & -bx_2 \\ 0 & s & cy_2 & -d + cx_2 - s \end{bmatrix}$$

Im Punkt $x_1^* = d/c$, $y_1^* = a/b$, $x_2^* = d/c$ und $y_2^* = a/b$ ist die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}(x_1^*, y_1^* x_2^*, y_2^*) = \begin{bmatrix} -r & -b\frac{d}{c} & r & 0 \\ c\frac{a}{b} & -s & 0 & s \\ r & 0 & -r & -b\frac{d}{c} \\ 0 & s & \frac{ca}{b} & -s \end{bmatrix}$$

Aus der charakteristischen Gleichung

[252] Es kann gezeigt werden, dass dieses Gleichgewicht das einzige – in allen seinen Komponenten – positive Gleichgewicht des Systems ist.

$$\det(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})=\begin{vmatrix} -r-\lambda & -b\frac{d}{c} & r & 0 \\ c\frac{a}{b} & -s-\lambda & 0 & s \\ r & 0 & -r-\lambda & -b\frac{d}{c} \\ 0 & s & \frac{ca}{b} & -s-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\det(\mathbf{J}-\lambda\mathbf{E})=(-r-\lambda)\begin{vmatrix} -s-\lambda & 0 & s \\ 0 & -r-\lambda & -b\frac{d}{c} \\ s & \frac{ca}{b} & -s-\lambda \end{vmatrix}-$$

$$-\left(-\frac{bd}{c}\right)\begin{vmatrix} \frac{ca}{b} & 0 & s \\ r & -r-\lambda & -\frac{bd}{c} \\ 0 & \frac{ca}{b} & -s-\lambda \end{vmatrix}+$$

$$+r\begin{vmatrix} \frac{ca}{b} & -s-\lambda & s \\ r & 0 & -\frac{bd}{c} \\ 0 & s & -s-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(-r-\lambda)\left\{(-s-\lambda)\left[(-r-\lambda)(-s-\lambda)+\frac{bd}{c}\frac{ca}{b}\right]+ss(r+\lambda)\right\}+$$

$$+\frac{bd}{c}\left\{\frac{ca}{b}\left[(-r-\lambda)(-s-\lambda)+\frac{bd}{c}\frac{ca}{b}\right]+sr\frac{ca}{b}\right\}+$$

$$+r\left\{\frac{ca}{b}\frac{bd}{c}s+(s+\lambda)r(-s-\lambda)+srs\right\}=$$

$$= -(r+\lambda)\{-(s+\lambda)[(r+\lambda)(s+\lambda)+ad]+s^2(r+\lambda)\}+$$

$$+ad[(r+\lambda)(s+\lambda)+ad+rs]+$$

$$+r[ads-r(s+\lambda)^2+rs^2]=$$

$$= (r+\lambda)^2(s+\lambda)^2+(r+\lambda)(s+\lambda)ad-(r+\lambda)^2s^2+$$

$$+ad(r+\lambda)(s+\lambda)+a^2d^2+adrs+$$

$$+adrs-r^2(s+\lambda)^2+r^2s^2=$$

$$= (r^2+2r\lambda+\lambda^2)(s^2+2s\lambda+\lambda^2)+2rsad+2s\lambda ad+$$

$$+2r\lambda ad+2\lambda^2 ad-[r^2s^2+2rs^2\lambda+s^2\lambda^2]+$$

$$+a^2d^2+2adrs-r^2s^2-2r^2s\lambda-r^2\lambda^2+r^2s^2=$$

$$= r^2s^2+2rs^2\lambda+s^2\lambda^2+2r^2s\lambda+4rs\lambda^2+2s\lambda^3+$$

$$+r^2\lambda^2+2r\lambda^3+\lambda^4+2adrs+2adrs+2s\lambda ad+$$

$$+2r\lambda ad+2\lambda^2 ad-r^2s^2-2rs^2\lambda-s^2\lambda^2+$$

$$+a^2d^2-2r^2s\lambda-r^2\lambda^2=$$

$$= 4rs\lambda^2+2s\lambda^3+2r\lambda^3+\lambda^4+2adrs+2adrs+2s\lambda ad+$$

$$+2r\lambda ad+2\lambda^2 ad+a^2d^2=$$

$$= \lambda^4+2\lambda^2 ad+a^2d^2+4rs\lambda^2+4adrs+2r\lambda^3+2r\lambda ad+2s\lambda^3+2s\lambda ad=$$

$$= \lambda^2\left(\lambda^2 + ad\right) + ad\left(\lambda^2 + ad\right) + 4rs\left(\lambda^2 + ad\right) + \left(\lambda^2 + ad\right)2r\lambda + \left(\lambda^2 + ad\right)2s\lambda =$$

$$= \left(\lambda^2 + ad\right)\left[\lambda^2 + ad + 2\lambda(r+s) + 4rs\right] = 0$$

Das charakteristische Polynom des linearisierten Systems ist also im Gleichgewichtspunkt $\left(x_1^*, y_{1,}^* x_2^*, y_2^*\right)$:

$$\left(\lambda^2 + ad\right)\left[\lambda^2 + 2\lambda(r+s) + ad + 4rs\right] = 0$$

Die Eigenwerte ergeben sich zu

Fall 1

$$\lambda^2 + ad = 0$$

$$\lambda_{12} = \pm i\sqrt{ad}$$

und es gibt rein imaginäre Eigenwerte, wie beim klassischen Lotka-Volterra-Modell.

Fall 2

$$\lambda^2 + 2(r+s)\lambda + ad + 4rs = 0$$

$$\lambda_{34} = \frac{-2(r+s) \pm \sqrt{4(r+s)^2 - 4(ad+4rs)}}{2} =$$

$$= -(r+s) \pm \sqrt{(r+s)^2 - (ad+4rs)}$$

da $ad + 4rs > 0$

$$\text{Re}\ \lambda_{34} < 0$$

Diese Eigenwerte haben immer negative Realteile. (Dies würde bedeuten, dass das System asymptotisch stabil wäre, wenn es nur diese zwei Eigenwerte hätte.[253])

[253] Vgl. Boyce/DiPrima (1995), S. 554.

Jansen zeigte mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion, dass alle Lösungen des Lotka-Volterra Systems von zwei identischen, durch Migration verbundenen Regionen mit positiven Anfangsbedingungen und mindestens einer positiven Migrationsrate synchronisiert werden.[254] Der Orbit konvergiert also zu einer synchronisierten harmonischen Oszillation.

[254] Vgl. Jansen (1994), S. 86-89. Jansen untersuchte ein mit (6.1) identische Struktur aufweisendes Modell mit anders skalierten Parametern.

Anhang 3: Untersuchung des erweiterten Realkapital-Humankapital-Modells

I. Realkapital-Humankapital-Modell mit ausgeglichenem Staatshaushalt

Das Grundmodell ohne Staat lautet:

$$\dot{k}(t) = [sA - (g_L + \delta) - \gamma\tau(t)]k(t) \tag{3.38}$$

$$\dot{\tau}(t) = [-\alpha + \beta Ak(t)]\tau(t) \tag{3.37}$$

Aus den folgenden Annahmen

$$Y = AK \tag{6.5}$$

$$G = T = zY \tag{6.6}$$

$$I_{pub} = \xi G, \qquad 0 \le \xi \le 1, \tag{6.7}$$

$$C_{pub} = (1-\xi)G \tag{6.8}$$

$$C_{pr} = (1-s)(1-z)Y \tag{6.9}$$

$$Y = C_{pr} + I_{pr} + G \tag{6.10}$$

$$K = K_{pr} + K_{pub} \tag{6.11}$$

$$\dot{K}_{pr} = I_{pr} - \delta K_{pr} \tag{6.12}$$

$$\dot{K}_{pub} = I_{pub} - \delta K_{pub} \tag{6.13}$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{6.14}$$

ergibt sich

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}_{pr} + \dot{K}_{pub}}{K} - g_L$$

$$\dot{K}_{pr} = I_{pr} - \delta K_{pr} = Y - C_{pr} - G - \delta K_{pr}$$

$$\dot{K}_{pub} = I_{pub} - \delta K_{pub} = \xi G - \delta K_{pub}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{Y - (1-s)(1-z)Y - zY - \delta K_{pr} + \xi zY - \delta K_{pub}}{K} - g_L =$$

$$= \frac{Y}{K}[1 - (1 - s - z + sz) - z + \xi z] - \delta - g_L =$$

$$= \frac{Y}{K}[s(1-z) + \xi z] - (\delta + g_L)$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = A[s(1-z) + \xi z] - (\delta + g_L)$$

und daraus ergibt sich die Gleichung

$$\dot{k}(t) = [sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta)]k(t) \tag{6.15}$$

Die Gleichungen des mit ausgeglichenem Staatshaushalt erweiterten Realkapital-Humankapital-Modells ergeben sich entsprechend:

$$\dot{k}(t) = [sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta) - \gamma\tau(t)]k(t) \tag{6.16}$$

$$\dot{\tau}(t) = [-\alpha + \beta Ak(t)]\tau(t) \tag{6.17}$$

Aus der Bedingung

$$sA(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta) > 0 \tag{6.18}$$

ergibt sich

$$A[s(1-z) + \xi z] > g_L + \delta$$

$$s(1-z) + \xi z > \frac{g_L + \delta}{A}$$

$$\delta > 0$$
$$g_L \geq 0$$
$$A > 0$$

$$s(1-z) + \xi z > 0$$

$$\xi z > s(z-1)$$

$$\xi > s\frac{z-1}{z}$$

die Ungleichung:

$$\xi > s\left(1 - \frac{1}{z}\right) \tag{6.19}$$

Die Gleichgewichtslösung des Systems:

$$k^{**} = \frac{\alpha}{\beta A} \tag{6.20}$$

und

$$\tau^{**} = \frac{As(1-z) + A\xi z - (g_L + \delta)}{\gamma} \tag{6.21}$$

II. Realkapital-Humankapital-Modell mit unausgeglichenem Staatshaushalt

Aus den folgenden Annahmen

$$Y = AK \tag{6.5}$$

$$\dot{B} = G - T + (r - \delta)B \tag{6.22}$$

$$G = \eta Y \tag{6.23}$$

$$I_{pub} = \xi G, \qquad 0 \le \xi \le 1 \tag{6.7}$$

$$C_{pub} = (1 - \xi)G \tag{6.8}$$

$$T = z[Y + (r - \delta)B] \tag{6.24}$$

und

$$C_{pr} = (1 - s)[Y + (r - \delta)B - T] \tag{6.25}$$

$$K = K_{pr} + K_{pub} \tag{6.11}$$

$$\dot{K}_{pub} = I_{pub} - \delta K_{pub} \tag{6.13}$$

aber

$$\dot{K}_{pr} = I_{pr} - \delta K_{pr} = S - \dot{B} - \delta K_{pr} \tag{6.26}$$

ergibt sich

$$\dot{K}_{pub} = \xi G - \delta K_{pub}$$

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}=\frac{S-\dot{B}+\xi G-\delta K}{K}-g_L=\frac{S-\dot{B}+\xi G}{K}-(g_L+\delta)$$

(6.10) berücksichtigend

$$Y=C_{pr}+I_{pr}+G=C_{pr}+S-\dot{B}+G=C_{pr}+S-(r-\delta)B+T \qquad (6.27)$$

daraus

$$Y=S-(r-\delta)B+T+(1-s)[Y+(r-\delta)B-T]$$

$$S=Y+(r-\delta)B-T-(1-s)[Y+(r-\delta)B-T]$$

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{s[Y+(r-\delta)B-T]-[G-T+(r-\delta)B]+\xi G}{K}-(g_L+\delta)=$$

$$=\frac{s[Y+(r-\delta)B-zY-z(r-\delta)B]-\eta Y+zY+z(r-\delta)B-(r-\delta)B+\xi\eta Y}{K}-(g_L+\delta)=$$

$$=\frac{Y[s-sz-\eta+z+\xi\eta]+(r-\delta)B[s-sz+z-1]}{K}-(g_L+\delta)=$$

$$=A[s+z(1-s)-\eta(1-\xi)]-(1-s)(1-z)(r-\delta)\frac{B}{K}-(g_L+\delta)$$

ergibt sich die erste Differenzialgleichung, die die Wachstumsdynamik des Modells beschreibt:

$$\dot{k}=\{A[s+z(1-s)-\eta(1-\xi)]-(g_L+\delta)\}k-(1-s)(1-z)(r-\delta)b \qquad (6.28)$$

wobei

$$b=\frac{B}{L}$$

Daraus

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{B}}{B} - g_L$$

und aus den obigen Annahmen

$$\dot{B} = G + (r - \delta)B - T \tag{6.22}$$

$$G = \eta Y \tag{6.23}$$

$$T = z[Y + (r - \delta)B] \tag{6.24}$$

ergibt sich

$$\dot{B} = \eta Y + (r - \delta)B - zY - z(r - \delta)B$$

$$\dot{B} = (\eta - z)Y + (1 - z)(r - \delta)B$$

$$\frac{\dot{B}}{B} = (\eta - z)\frac{Y}{B} + (1 - z)(r - \delta)$$

$$\frac{\dot{B}}{B} - g_L = (\eta - z)\frac{Y}{B} + (1 - z)(r - \delta) - g_L$$

$$\frac{\dot{b}}{b} = (\eta - z)\frac{Y}{B} + (1 - z)(r - \delta) - g_L$$

$$\dot{b} = (\eta - z)\frac{Y}{B}\frac{B}{L}\frac{K}{K} + [(1 - z)(r - \delta) - g_L]b$$

die zweite Differenzialgleichung, die die Wachstumsdynamik des Modells beschreibt:

$$\dot{b} = A(\eta - z)k + [(1-z)(r-\delta) - g_L]b \tag{6.29}$$

Wenn das Humankapital mit diesem Modell (6.28) und (6.29) zusammen betrachtet wird, erhält man:

$$\dot{k}(t) = \{A[s + z(1-s) - \eta(1-\xi)] - (g_L + \delta) - \gamma\tau(t)\}k(t) - (1-s)(1-z)(r-\delta)b(t) \tag{6.30}$$

$$\dot{b}(t) = A(\eta - z)k(t) + [(1-z)(r-\delta) - g_L]b(t) \tag{6.29}$$

und

$$\dot{\tau}(t) = [-\alpha + \beta A k(t) + \Theta b(t)]\tau(t) \tag{6.31}$$

sowie die Gleichgewichtslösung des Systems:

$$k^{***} = \frac{\alpha[(1-z)(r-\delta) - g_L]}{\beta A[(1-z)(r-\delta) - g_L] - A(\eta - z)\Theta} = \frac{\alpha}{\beta A - \frac{A(\eta - z)\Theta}{(1-z)(r-\delta) - g_L}} \tag{6.32}$$

$$b^{***} = \frac{-\alpha A(\eta - z)}{\beta A[(1-z)(r-\delta) - g_L] - A(\eta - z)\Theta} \tag{6.33}$$

und

$$\tau^{***} = \frac{A[s + z(1-s) - \eta(1-\xi)] - (g_L + \delta)}{\gamma} + \frac{[(1-s)(1-z)(r-\delta)A(\eta - z)]}{\gamma[(1-z)(r-\delta) - g_L]} \tag{6.34}$$

Die Bedingung $k^{***} > k^{**}$ ist erfüllt, wenn aus (6.20) und (6.32)

$$\frac{\alpha}{\beta A - \frac{A(\eta - z)\Theta}{(1-z)(r-\delta) - g_L}} > \frac{\alpha}{\beta A}$$

$$\frac{A(\eta - z)\Theta}{(1-z)(r-\delta) - g_L} > 0$$

A und Θ sind per Definition positiv, $(\eta - z)$ ist aus wirtschaftlichen Erwägungen notwendigerweise positiv, deswegen

$$g_L < (1-z)(r-\delta) \tag{6.35}$$

oder

$$z < \frac{r-\delta-g_L}{r-\delta} \tag{6.36}$$

Die Bedingung $\tau^{***} > \tau^{**}$ ist erfüllt, wenn aus (6.21) und (6.34)

$$\frac{A[s+z(1-s)-\eta(1-\xi)]-(g_L+\delta)}{\gamma} + \frac{[(1-s)(1-z)(r-\delta)A(\eta-z)]}{\gamma[(1-z)(r-\delta)-g_L]} > \frac{As(1-z)+A\xi z-(g_L+\delta)}{\gamma}$$

$$\frac{A[s+z(1-s)-\eta(1-\xi)]-(g_L+\delta)-A[s(1-z)+\xi z]+(g_L+\delta)}{\gamma} + \frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)A(\eta-z)}{\gamma[(1-z)(r-\delta)-g_L]} > 0$$

$$s+z-zs-\eta(1-\xi)-s+zs-\xi z+\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)(\eta-z)}{(1-z)(r-\delta)-g_L} > 0$$

$$z(1-\xi)-\eta(1-\xi)+\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)(\eta-z)}{(1-z)(r-\delta)-g_L} > 0$$

$$(z-\eta)(1-\xi)+\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)(\eta-z)}{(1-z)(r-\delta)-g_L} > 0$$

$$(z-\eta)\left[(1-\xi)-\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)}{(1-z)(r-\delta)-g_L}\right]>0$$

Da $(\eta-z)>0$

$$1-\xi<\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)}{(1-z)(r-\delta)-g_L}$$

$$1-\frac{(1-s)(1-z)(r-\delta)}{(1-z)(r-\delta)-g_L}<\xi$$

$$\frac{(1-z)(r-\delta)-g_L-(1-s)(1-z)(r-\delta)}{(1-z)(r-\delta)-g_L}<\xi$$

$$\frac{(1-z)(r-\delta)[1-(1-s)]-g_L}{(1-z)(r-\delta)-g_L}<\xi$$

$$\frac{s(1-z)(r-\delta)-g_L}{(1-z)(r-\delta)-g_L}<\xi \qquad (6.37)$$

Anhang 4: Untersuchung des Differenzialgleichungssystems der Replikatorengleichung

I. Transformation der Lotka-Volterra-Gleichungen in die Replikatorengleichungen und Bestimmung der Gleichgewichtslösung

Die Lotka-Volterra-Gleichungen in n Populationen $x_1, \ldots, x_n$ sind:

$$\dot{x}_i = x_i\left(a_{i0} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{8.9}$$

Die zweidimensionalen Lotka-Volterra-Gleichungen sind wie folgt gegeben:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2) \tag{8.10}$$

$$\dot{x}_2 = x_2(-d + cx_1) \tag{8.11}$$

Wenn $x_0 = 1$, und $a_{0j} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n$ [255], dann

$$a_{00} = 0 \quad a_{01} = 0 \quad a_{02} = 0$$

$$a_{10} = a \quad a_{11} = 0 \quad a_{12} = -b$$

$$a_{20} = -d \quad a_{21} = c \quad a_{22} = 0$$

und die Auszahlungsmatrix der Replikatorengleichung ist dementsprechend:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \\ -d & c & 0 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

[255] Vgl. Hofbauer (1981), S. 1004.

Die Replikatorengleichungen von $n+1$ Strategien $y_0, y_1, \ldots, y_n$ sind:

$$\dot{y}_i = y_i\left(\sum_j a_{ij}y_j - \sum_{k,l} a_{kl}y_k y_l\right) \qquad i = 0,1,\ldots,n \tag{8.8}$$

Die Replikatorengleichungen von 3 Strategien y_0, y_1, y_2 sind in unserem Modell:

$$\dot{y}_i = y_i\left(\sum_{j=0}^{2} a_{ij}y_j - \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} a_{kl}y_k y_l\right), \qquad i = 0,1,2$$

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2} a_{kl}y_k y_l = y_0(a_{00}y_0 + a_{01}y_1 + a_{02}y_2) +$$

$$+ y_1(a_{10}y_0 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2) + y_2(a_{20}y_0 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2) =$$

$$= y_0 0 + y_1(ay_0 - by_2) + y_2(-dy_0 + cy_1) =$$

$$= y_1(ay_0 - by_2) + y_2(-dy_0 + cy_1) = Z$$

Durch Variablentransformation nach Hofbauer

$$y_i = \frac{x_i}{\sum_{j=0}^{n} x_j}$$

d.h.

$$y_0 = \frac{1}{1+x_1+x_2}, \qquad y_1 = \frac{x_1}{1+x_1+x_2}, \text{ und} \qquad y_2 = \frac{x_2}{1+x_1+x_2} \tag{8.13}$$

$$\dot{y}_0 = y_0(0 - Z)$$

$$\dot{y}_1 = y_1(ay_0 - by_2 - Z)$$

$$\dot{y}_2 = y_2(-dy_0 + cy_1 - Z)$$

$$\dot{y}_0 = -y_0 y_1 (a y_0 - b y_2) - y_0 y_2 (-d y_0 + c y_1)$$

$$\dot{y}_1 = a y_0 y_1 - b y_1 y_2 - y_1^2 (a y_0 - b y_2) - y_1 y_2 (-d y_0 + c y_1)$$

$$\dot{y}_2 = -d y_0 y_2 + c y_1 y_2 - y_1 y_2 (a y_0 - b y_2) - y_2^2 (-d y_0 + c y_1)$$

$$\dot{y}_0 = y_0 [- y_1 (a y_0 - b y_2) - y_2 (-d y_0 + c y_1)] \tag{8.14}$$

$$\dot{y}_1 = y_1 [a y_0 - b y_2 - y_1 (a y_0 - b y_2) - y_2 (-d y_0 + c y_1)] \tag{8.15}$$

$$\dot{y}_2 = y_2 [- d y_0 + c y_1 - y_1 (a y_0 - b y_2) - y_2 (-d y_0 + c y_1)] \tag{8.16}$$

Die (nicht triviale) Gleichgewichtslösung:

$$\dot{y}_i = 0$$

$$\dot{y}_0 = y_0 (0 - Z) = 0$$

$$\dot{y}_1 = y_1 (a y_0 - b y_2 - Z) = 0$$

$$\dot{y}_2 = y_2 (- d y_0 + c y_1 - Z) = 0$$

$$Z = 0$$

$$a y_0 - b y_2 = 0$$

$$y_2 = \frac{a}{b} y_0$$

$$- d y_0 + c y_1 = 0$$

$$y_1 = \frac{d}{c} y_0$$

$$y_0 + y_1 + y_2 = 1$$

$$y_0 + \frac{d}{c} y_0 + \frac{a}{b} y_0 = 1$$

$$y_0 \left(1 + \frac{d}{c} + \frac{a}{b} \right) = 1$$

$$y_0 \frac{bc + bd + ac}{bc} = 1$$

$$y_0^* = \frac{bc}{bc + bd + ac}, \qquad y_1^* = \frac{bd}{bc + bd + ac}, \text{ und} \qquad y_2^* = \frac{ac}{bc + bd + ac} \tag{8.17}$$

II. Ist das Gleichgewicht $y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*)$ evolutorisch stabile Strategie?

1. Untersuchung der Gleichgewichtsbedingung (8.6)

Ermittlung ob

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{*} \geq \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{*}$$

mit

$$y_0^{*} = \frac{bc}{bc+bd+ac}, \qquad y_1^{*} = \frac{bd}{bc+bd+ac}, \text{ und} \qquad y_2^{*} = \frac{ac}{bc+bd+ac}$$

für alle y gilt:

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{*} =$$

$$\begin{bmatrix} y_0^{*} & y_1^{*} & y_2^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \\ -d & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^{*} \\ y_1^{*} \\ y_2^{*} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} y_0^{*} & y_1^{*} & y_2^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ay_0^{*} - by_2^{*} \\ -dy_0^{*} + cy_1^{*} \end{bmatrix} =$$

$$y_1^{*}\left(ay_0^{*} - by_2^{*}\right) + y_2^{*}\left(-dy_0^{*} + cy_1^{*}\right) =$$

$$y_1^{*}\left(a\frac{bc}{bc+bd+ac} - b\frac{ac}{bc+bd+ac}\right) + y_2^{*}\left(-d\frac{bc}{bc+bd+ac} + c\frac{bd}{bc+bd+ac}\right) = 0$$

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{*} =$$

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \\ -d & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^* \\ y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ay_0^* - by_2^* \\ -dy_0^* + cy_1^* \end{bmatrix} =$$

$$y_1\left(ay_0^* - by_2^*\right) + y_2\left(-dy_0^* + cy_1^*\right) =$$

$$y_1\left(a\frac{bc}{bc+bd+ac} - b\frac{ac}{bc+bd+ac}\right) + y_2\left(-d\frac{bc}{bc+bd+ac} + c\frac{bd}{bc+bd+ac}\right) = 0$$

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*$$

2. Untersuchung der Stabilitätsbedingung (8.7)

Da $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^*$ gilt, ist noch zu untersuchen, ob

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} > \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}, \qquad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^*$$

erfüllt ist:

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$$

$$\left(\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} - \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{A}\mathbf{y} > 0$$

$$\begin{bmatrix} y_0^* - y_0 & y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \\ -d & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} y_0^* - y_0 & y_1^* - y_1 & y_2^* - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ ay_0 - by_2 \\ -dy_0 + cy_1 \end{bmatrix} > 0$$

$$(y_1^* - y_1)(ay_0 - by_2) + (y_2^* - y_2)(-dy_0 + cy_1) > 0$$

$$\left(\frac{bd}{bc + bd + ac} - y_1\right)(ay_0 - by_2) + \left(\frac{ac}{bc + bd + ac} - y_2\right)(-dy_0 + cy_1) > 0$$

Es gibt z. B. die Strategie $\boldsymbol{y}$= (0,0,1), bei der die Ungleichheit nicht erfüllt ist

$$\left(\frac{bd}{bc + bd + ac} - 0\right)(-b) + \left(\frac{ac}{bc + bd + ac} - 1\right)(0) \not> 0$$

die Strategie $y^* = (y_0^*, y_1^*, y_2^*)$ ist also keine evolutorisch stabile Strategie.

III. Stabilitätsuntersuchung des dreidimensionalen Differenzialgleichungssystems der Replikatorengleichung

$$\dot{y}_0 = y_0\left[-y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)\right] \tag{8.14}$$

$$\dot{y}_1 = y_1\left[ay_0 - by_2 - y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)\right] \tag{8.15}$$

$$\dot{y}_2 = y_2\left[-dy_0 + cy_1 - y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)\right] \tag{8.16}$$

$$\dot{y}_0 = f(y_0, y_1, y_2)$$

$$\dot{y}_1 = g(y_0, y_1, y_2)$$

$$\dot{y}_2 = h(y_0, y_1, y_2)$$

Die Elemente der Jacobi-Matrix:

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = \left[-y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)\right] + y_0\left[-ay_1 + dy_2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = y_0\left[-(ay_0 - by_2) - cy_2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = y_0\left[by_1 - (-dy_0 + cy_1)\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_0} = y_1\left[a - ay_1 + dy_2\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = \left[ay_0 - by_2 - y_1(ay_0 - by_2) - y_2(-dy_0 + cy_1)\right] +$$

$$+ y_1\left[-(ay_0 - by_2) - cy_2\right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = y_1\left[-b + by_1 - (-dy_0 + cy_1)\right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_0} = y_2\left[-d - ay_1 + dy_2\right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = y_2\left[c - \left(ay_0 - by_2\right) - cy_2\right]$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_2} = \left[-dy_0 + cy_1 - y_1\left(ay_0 - by_2\right) - y_2\left(-dy_0 + cy_1\right)\right] +$$

$$+ y_2\left[by_1 - \left(-dy_0 + cy_1\right)\right]$$

Im nicht trivialen Gleichgewicht

$$y_0^* = \frac{bc}{bc + bd + ac} \quad y_1^* = \frac{bd}{bc + bd + ac} \quad y_2^* = \frac{ac}{bc + bd + ac}$$

ergibt sich daraus:

$$j_{11} = \frac{bc}{bc + bd + ac} \cdot \frac{-abd + acd}{bc + bd + ac} = \frac{abcd(-b + c)}{(bc + bd + ac)^2}$$

$$j_{12} = \frac{bc}{bc + bd + ac} \cdot \frac{-ac^2}{bc + bd + ac} = \frac{-abc^3}{(bc + bd + ac)^2}$$

$$j_{13} = \frac{bc}{bc + bd + ac} \cdot \frac{b^2 d}{bc + bd + ac} = \frac{b^3 cd}{(bc + bd + ac)^2}$$

$$j_{21} = \frac{bd}{bc + bd + ac}\left[\frac{abc + abd + a^2 c - abd + acd}{bc + bd + ac}\right] = \frac{abcd(a + b + d)}{bc + bd + ac}$$

$$j_{22} = \frac{bd}{bc + bd + ac} \cdot \frac{-ac^2}{bc + bd + ac} = \frac{-abc^2 d}{(bc + bd + ac)^2}$$

$$j_{23} = \frac{b^2 d}{bc + bd + ac}\left[-1 + \frac{bd}{bc + bd + ac}\right] = -\frac{b^2 cd\left(a + b\right)}{\left(bc + bd + ac\right)^2}$$

$$j_{31} = \frac{ac}{bc+bd+ac}\left[-d + \frac{-abd+acd}{bc+bd+ac}\right] = \frac{-abcd(a+c+d)}{(bc+bd+ac)^2}$$

$$j_{32} = \frac{ac}{bc+bd+ac}\left[c - \frac{ac^2}{bc+bd+ac}\right] = \frac{abc^2(c+d)}{(bc+bd+ac)^2}$$

$$j_{33} = \frac{ac}{bc+bd+ac} \cdot \frac{b^2 d}{bc+bd+ac} = \frac{ab^2 cd}{(bc+bd+ac)^2}$$

$$\mathbf{J} = \frac{bc}{(bc+bd+ac)^2}\begin{bmatrix} ad(-b+c) & -ac^2 & b^2 d \\ ad(a+b+d) & -acd & -bd(a+b) \\ -ad(a+c+d) & ac(c+d) & abd \end{bmatrix}$$

mit $K = \frac{bc}{(bc+bd+ac)^2}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} Kad(-b+c) & -Kac^2 & Kb^2 d \\ Kad(a+b+d) & -Kacd & -Kbd(a+b) \\ -Kad(a+c+d) & Kac(c+d) & Kabd \end{bmatrix}$$

Aus der charakteristischen Gleichung

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} Kad(-b+c)-\lambda & -Kac^2 & Kb^2 d \\ Kad(a+b+d) & -Kacd-\lambda & -Kbd(a+b) \\ -Kad(a+c+d) & Kac(c+d) & Kabd-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\mathbf{J} - \lambda\mathbf{E}) = [Kad(-b+c)-\lambda]\{(-Kacd-\lambda)(Kabd-\lambda) + K^2 bdac(a+b)(c+d)\} +$$

$$+ Kac^2\{Kad(a+b+d)(Kabd-\lambda) - K^2 abd^2(a+c+d)(a+b)\} +$$

$$+ Kb^2 d\{Kad(a+b+d)Kac(c+d) - (Kacd+\lambda)Kad(a+c+d)\} =$$

$$= [-Kabd + Kacd - \lambda]\{-K^2a^2bcd^2 - Kabd\lambda + Kacd\lambda + \lambda^2\} +$$

$$[-Kabd + Kacd - \lambda]\{K^2a^2bc^2d + K^2ab^2c^2d + K^2a^2bcd^2 + K^2ab^2cd^2\} +$$

$$+ Kac^2\{Kad[Ka^2bd + Kab^2d + Kabd^2 - \lambda a - \lambda b - \lambda d]\} +$$

$$+ Kac^2\{(-K^2abd^2)[a^2 + ac + ad + ab + bc + bd]\} +$$

$$+ Kab^2d^2\{K^2ac[ac + bc + cd + ad + bd + d^2]\} -$$

$$- Kab^2d^2\{[K^2a^2cd + K^2ac^2d + K^2acd^2 + K\lambda a + K\lambda c + K\lambda d]\} =$$

$$= K^2a^2b^2d^2\lambda - K^2a^2bcd^2\lambda +$$

$$+ Kabd\lambda^2 - K^2a^2bcd^2\lambda + K^2a^2c^2d^2\lambda - Kacd\lambda^2 - Kabd\lambda^2 + Kacd\lambda^2 -$$

$$- \lambda^3 - K^3a^3b^2c^2d^2 + K^3a^3bc^3d^2 - K^2a^2bc^2d\lambda - K^3a^2b^3c^2d^2 + K^3a^2b^2c^3d^2 -$$

$$- K^2ab^2c^2d\lambda - K^3a^2b^3cd^3 + K^3a^2b^2c^2d^3 - K^2ab^2cd^2\lambda +$$

$$+ K^3a^4bc^2d^2 + K^3a^3b^2c^2d^2 + K^3a^3bc^2d^3 - K^2a^3c^2d\lambda - K^2a^2bc^2d\lambda -$$

$$- K^2a^2c^2d^2\lambda - K^3a^4bc^2d^2 - K^3a^3bc^3d^2 - K^3a^3bc^2d^3 - K^3a^3b^2c^2d^2 -$$

$$- K^3a^2b^2c^3d^2 - K^3a^2b^2c^2d^3 +$$

$$+ K^3a^3b^2c^2d^2 + K^3a^2b^3c^2d^2 + K^3a^2b^2c^2d^3 + K^3a^3b^2cd^3 +$$

$$+ K^3a^2b^3cd^3 + K^3a^2b^2cd^4 - K^3a^3b^2cd^3 - K^3a^2b^2c^2d^3 - K^3a^2b^2cd^4 -$$

$$-K^2a^2b^2d^2\lambda - K^2ab^2cd^2\lambda - K^2ab^2d^3\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda K^2\left(2a^2bcd^2 + 2a^2bc^2d + ab^2c^2d + 2ab^2cd^2 + a^3c^2d + ab^2d^3\right) = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda K^2 ad\left[a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd + 2abc^2 + 2b^2cd\right] = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda K^2 ad\left[a^2c^2 + 2abc(c+d) + b^2\left(c^2 + d^2 + 2cd\right)\right] = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda K^2 ad[ac + b(c+d)]^2 = 0$$

$$\lambda\left\{\lambda^2 + K^2 ad[ac + b(c+d)]^2\right\} = 0$$

und die Eigenwerte ergeben sich als

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\frac{bc[ac + b(c+d)]}{(bc + bd + ac)^2}\sqrt{ad}\cdot i$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\frac{bc}{(bc + bd + ac)}\sqrt{ad}\cdot i = \pm y_0^*\sqrt{ad}\cdot i$$

Es gibt also zwei rein imaginäre Eigenwerte, wie beim klassischen Lotka-Volterra-Modell, und darüber hinaus gibt es einen Null-Eigenwert. Dementsprechend liegt keine asymptotische Stabilität vor.